Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3 Premier Bimestre 2003/2004

Séance 1 9 Octobre 2003

Plan de la Séance : Formation d'Image

Coordonnées Homogènes en Notation Tensorielle

Les coordonnées homogènes repose sur une notation dans laquelle les vecteurs en N dimensions sont représentées par un vecteur en N+1 dimensions.

Les coordonnées homogènes sont un outil de base en vision, en robotique et en synthèse d'images.

Exemple : un point

Soit un plan Euclidienne en R^2 composé de points,

En notation classique, un point est un vecteur : $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

En notation homogène, un point est un vecteur $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

On note que a, b : $a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

démonstration $a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax/a \\ ay/a \\ a/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Vecteur et Matrice en Notation Tensorielle

En notation tensorielle, la signe " $\rightarrow$ " est remplacé par un indice en super-scripte ou sous-scripte. Une super-scripte signifie un vecteur colonne. Par exemple, le point est indiqué par un vecteur p^i

$$P^i = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

une sous-scripte indique un vecteur ligne

Par exemple, la droite est indiquée par le vecteur l_i :

$$L_i = (l_1, l_2, l_3)$$

Une matrice est une ligne de vecteurs (ou une vecteurs de lignes).

$$M_i^j = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix}$$

Le produit d'un vecteur avec une indice en super scripte et une vecteur avec le même indice en sous-scripte signifie une produit scalaire. Ceci est fait par une sommation implicite des indices. (La Convention de Sommation d'Einstein).

Donc, le produit indique une annulation des souscriptes et superscriptes.

$$L_i P^i = l_1 p^1 + l_2 p^2 + l_3 p^3$$

Cette sommation et commutative

$$L_i P^i = P^i L_i$$

Pour la produit d'une matrice et une vecteur, ceci donne une nouvelle vecteur.

$$P^j = M_i^j P^i$$

Ceci représent une tranformation du repère "i" vers le repère "j".

L'équation d'une droite

Dans un plan Euclidienne en R^2, en notation "classique", une droite est définie par une équation

$$a\ x + b\ y + x = 0.$$

On peut exprimer cette équation comme la produit de deux vecteurs :

$$\vec{L} \cdot \vec{P} = 0$$

ou $\vec{L} = (a\ b\ c)$ et $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

En notation tensorielle, cette equation est exprimé :

$$L_i P^i = 0 \qquad \text{avec } i=1, 2, 3.$$

La sommation des indices est implicites.

Le produit Croisé

Une droite est définie par deux points. Un point est défini par le croisement de deux droites. Il y a une dualité parfaite entre les points et les droites.

En notation classique, $ax + by + c = 0$
le manière de déterminer la droite pour deux points est :

où $a= (y_1 - y_2)$ $b= (x_2 - x_1)$

$$
\begin{aligned}
c &= -(a\, x_1 + b\, y_1) = - x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_2 - x_1) \\
&= - x_1\, y_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + y_1\, x_1 \\
&= x_1\, y_2 - y_1\, x_2
\end{aligned}
$$

La droite est $x\,(y_2 - y_1) + y\,(x_1 - x_2) - x_1\, y_2 + y_1\, x_2 = 0$

Ceci peut être calculé par la déterminante, avec les variables libres dans le premier colonne :

$$
\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0
$$

$$
= x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0
$$

Il s'agit d'une méthode générale de déterminer les paramètres d’une équation linéaire à partir des contraintes. Ca marche aussi pour trouver la point d'intersection de deux lignes.

On peut, également, écrire la déterminante comme un produit croisé.

$$
L^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}
$$

En notation tensorielle, le déterminant et fait par l’opérateur tensorielle E_{ijk} et E^{ijk}. Cette opérateur signifie une evaluation des indices pour une déterminant.

Exemplel La droite L_i est définit par les points P^j et Q^k:

$$
L_i = E_{ijk}\, P^j\, Q^k
$$

Pour

$$
P^j = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1/p^3 \\ p^2/p^3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^j = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1/q^3 \\ q^2/q^3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$i = 1$, $ijk\text{-}ikj = 123\text{-}132$: $l_1 = p^2 q^3 - p^3 q^2$
$i = 2$, $ijk\text{-}ikj = 231\text{-}213$: $l_2 = p^3 q^1 - p^1 q^3$
$i = 3$, $ijk\text{-}ikj = 312\text{-}321$: $l_3 = p^1 q^2 - p^2 q^1$

et si $p^3 = 1$ et $q^3 = 1$ alors nous retrouvons notre forme :

$$P^j = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^j = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$i = 1$, $ijk\text{-}ikj = 123\text{-}132$: $l_1 = p^2 q^3 - p^3 q^2 = p^2 - q^2$
$i = 2$, $ijk\text{-}ikj = 231\text{-}213$: $l_2 = p^3 q^1 - p^1 q^3 = p^1 - q^1$
$i = 3$, $ijk\text{-}ikj = 312\text{-}321$: $l_3 = p^1 q^2 - p^2 q^1$

Intersection de deux droites

Pour le calcul d'un point d'intersection de deux droites.

soit deux droites : L: ax + by + c = 0 et M : dx + ey + f = 0.

En notation classique : Soit $\vec{L} = (a\ b\ c\ )$ et $\vec{M} = (d\ e\ f\ )$

Le point d'intersection est $x = \frac{bf-ce}{ae-bd}$ $y = \frac{cd-af}{ae-bd}$

Pour le demontrer :

$$\vec{P} = \vec{L} \times \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf-ce \\ cd-af \\ ae-db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bf-ce}{ae-db} \\ \frac{cd-af}{ae-db} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le operateur "x" est équivalent à une déterminant.
Un point est l'intérsection d'une infini de droites. Soit deux droits
Soit deux droites (a, b, c) et (d, e, f). soit une droit "libre" avec coéfficient u, v, w :

$$u \cdot x + v \cdot y + w = 0.$$

On peut trouver les coordonées du point grace au déterminant.

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 = u(bf-ce) + v(cd-af) + w(ae-bd) = 0$$

ou bien $u \cdot \frac{bf-ce}{ae-bd} + v \cdot \frac{cd-af}{ae-bd} + w = 0 = u \cdot x + v \cdot y + w$

donc $x = \frac{bf-ce}{ae-bd}$ et $y = \frac{cd-af}{ae-bd}$ et 1=1.

En notation Tensorielle, nous avons l'opérateur tensorielle E^{ijk}

On a $P^i = E^{ijk} L_i M_j$
Pour

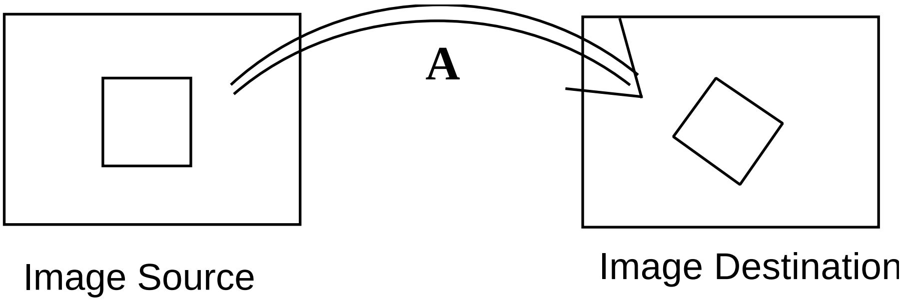
$$L^j = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} = \text{ et } M^k = \begin{pmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{pmatrix}$$

i =1, ijk-ikj = 123-132 : $p^1 = l_2 m_3 - l_3 m_2$
i =2, ijk-ikj = 231-213 : $p^2 = l_3 m_1 - l_1 m_3$
i =3, ijk-ikj = 312-321 : $p^3 = l_1 m_2 - l_2 m_1$

Transformations en Coordonnées Homogènes.

Les coordonnés homogènes fournissent une notation uniforme pour les transformations.

Par exemple, les transformations dans un plan sont décrites par une matrice homogène 3 x 3.



Translation

$x_2 = x_1 + t_x,$
$y_2 = y_1 + t_y$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En notation tensorielle :

$P^B = \mathbf{T}^B_A P^A$ pour A, B = 1, 2, 3.

Donc $\mathbf{T}^B_A$ est une transformation du repère A vers le repère B.

Les indices permet de noter les repères.

Rotation

(Repère main droite, rotation sens trigonométrique)

$x_2 = \mathrm{Cos}(\theta)\, x_1 + \mathrm{Sin}(\theta)\, y_1,$
$y_2 = \mathrm{Sin}(\theta)\, x_1 - \mathrm{Cos}(\theta) y_1$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\theta) & \mathrm{Sin}(\theta) & 0 \\ -\mathrm{Sin}(\theta) & \mathrm{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quand le repère tourne dans le sanse "θ", le vecteur est tourner dans le sense –θ

Translation et Rotation

$$x_2 = \mathrm{Cos}(\theta)\, x_1 + \mathrm{Sin}(\theta)\, y_1 + t_x$$
$$x_2 = \mathrm{Sin}(\theta)\, x_1 - \mathrm{Cos}(\theta)\, y_1 + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\theta) & \mathrm{Sin}(\theta) & t_x \\ -\mathrm{Sin}(\theta) & \mathrm{Cos}(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En tensorielle, $P^B = \mathbf{R}_A^B\, P^A$

Transformations d'échelle, rotation et translation

Une transformation de similitude d'une image est définie par
une rotation, une translation, et un changement de taille des axes.

Soit un changement d'échelle s_x et s_y des axes x_1 et y_1 (repère source)
suivi d'une rotation d'angle θ dans le plan de l'image source,
suivi d'une translation t_x, t_y s'exprimes dans le repère de la destination.

Ces paramètres donne une transformation (s_x, s_y, θ, t_x, t_y) de

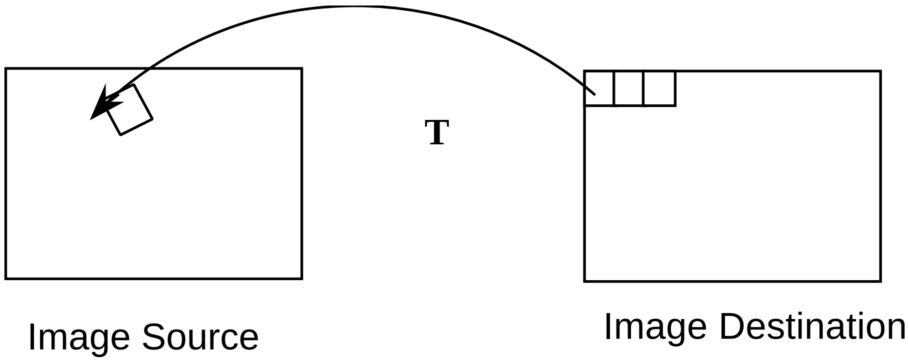
1) Un changement d'échelle des axes, puis
2) Une rotation des axes, puis
3) Une translation.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x\, \mathrm{Cos}(\theta) & s_y\, \mathrm{Sin}(\theta) & t_x \\ -s_x\, \mathrm{Sin}(\theta) & s_y\, \mathrm{Cos}(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ou bien

$$x_2 = s_x \mathrm{Cos}(\theta)\, x_1 + s_y\, \mathrm{Sin}(\theta) y_1 + t_x,$$
$$y_2 = s_y \mathrm{Sin}(\theta)\, x_1 - s_x\, \mathrm{Cos}(\theta) y_1 + t_y$$

Transformations d'images



Pour chaque pixel de l'image de destination (x_d, y_d), on calcule une position (x_s, y_s) dans l'image de la source.

$$P^s = \mathbf{T}_d^s P^d$$

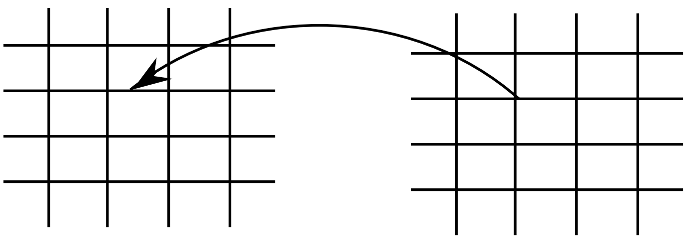
ou

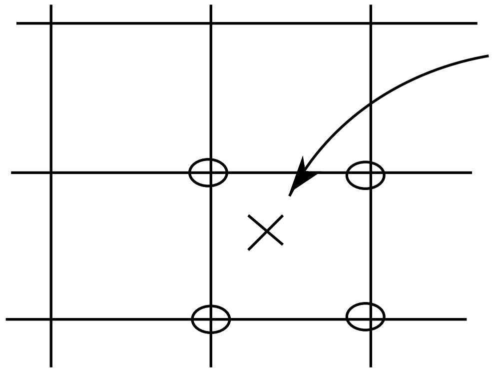
$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \operatorname{Cos}(\theta) & s_x \operatorname{Sin}(\theta) & \Delta x \\ -s_y \operatorname{Sin}(\theta) & s_y \operatorname{Cos}(\theta) & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite la nouvelle intensité ou couleur du pixel destination, P^d, est calculé en fonction l'intensité ou couleur de la pixel source, P^s.

MAIS, $P^s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un entier!

Quelle valeur faut-il prendre pour les pixels?
Pour chaque pixel du destination, (x_2, y_2) on calcul le position du source, (x_1, y_1).
Ensuite, on détermine une valeur par interpolation avec les pixels voisins.



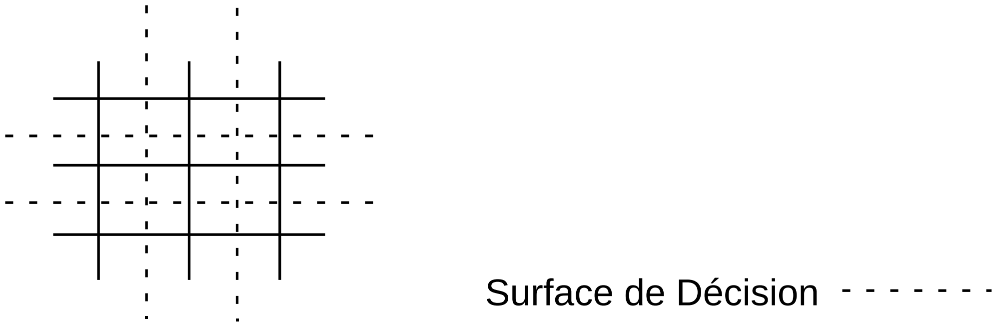


Il existe plusieurs fonctions d'interpolation.

Ordre zéro :	Plus proche voisin.
Ordre unité :	intérpolation linéaire et "bi-linéaire"
Ordre trois :	Spline cubic.

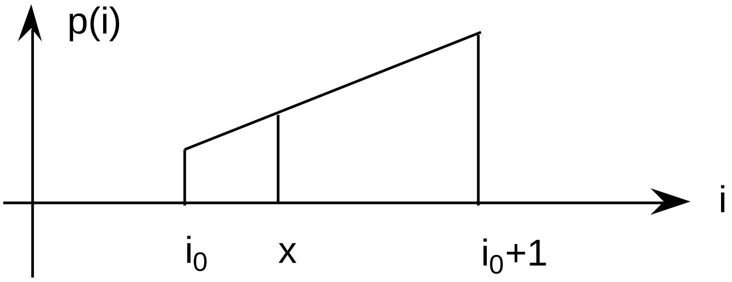
Interpolation d'ordre zéro

Pour les images Binaire, on peut fair que l'ordre zéro.
La valeur de $p(i_2, j_2)$ déterminer par arrondis de $p(i_1, j_1)$.



Interpolation Linéaire

Interpolation Linéaire en 1-D. soit $i_o \leq x \leq i_o+1$



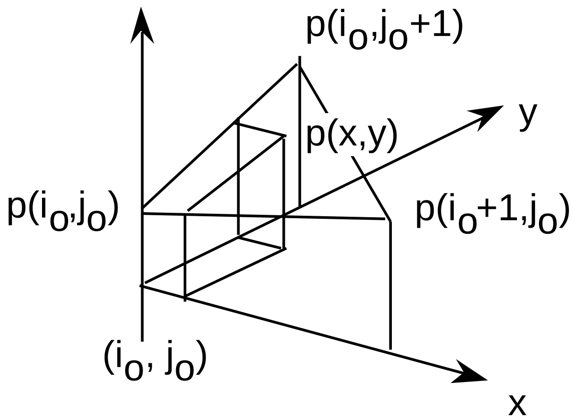
A partir de l'origine : $p(x) = p(0) + m_x x$

A partire de deux points i_o et i_0+1 :

pente : $m_x \equiv \frac{\Delta P}{\Delta x} = = p(i+1) - p(i)$

équation de la droite : $p(x) = (x-i_o)\, m_x + p(i_o)$

Interpolation Linéaire en 2D

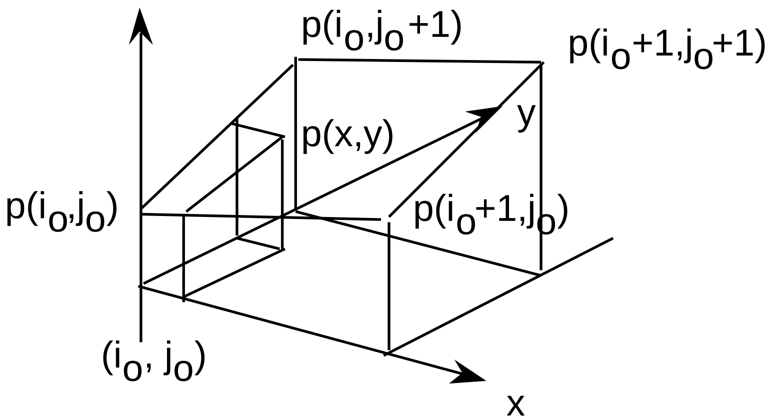


$$m_x \equiv \frac{\Delta P}{\Delta x} = p(i_o+1, j_o) - p(i_o, j_o)$$

$$m_y \equiv \frac{\Delta P}{\Delta y} = p(i_o, j_o+1) - p(i_o, j_o)$$

donc $p(x, y) = m_x \cdot (x-i_o) + m_y \cdot (y-j_o) + p(i_o, j_o)$

Interpolation Bi-lineaire



Forme Bilinéaire : Hyperbolic Paraboloïde

$$p(x, y) = a\,x + b\,y + c\,x\,y + d.$$

Une interpolation linéaire en "y" de deux interpolations linaire en "x".

Dérivation :

$$p(x, 0) = p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) – p(0, 0))$$
$$p(x, 1) = p(0, 1) + x \cdot (p(1, 1) – p(0, 1))$$

$$p(x, y) = p(x, 0) + y \cdot (p(x, 1) – p(x, 0))$$

$$\begin{aligned} &= p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) – p(0, 0)) \\ &\qquad + y \cdot (p(0, 1) + x \cdot (p(1, 1) – p(0, 1))) \\ &\qquad – y \cdot (p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) – p(0, 0))) \\ &= p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) – p(0, 0)) + y \cdot (p(0, 1) – p(0, 0)) \\ &\qquad + x \cdot y \cdot (p(1, 1) – p(0, 1) – p(1, 0) + p(0, 0)) \end{aligned}$$

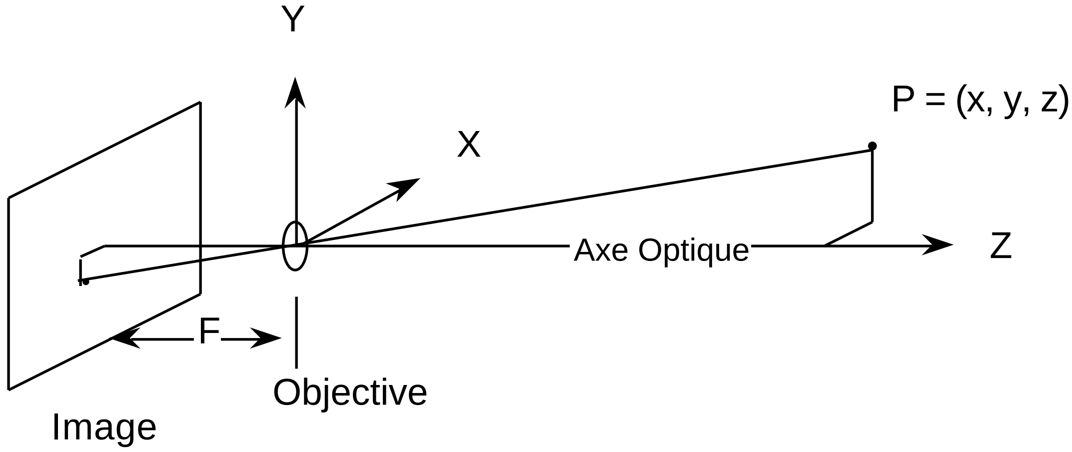
Pour le point i_o, j_o, remplace : $0 \rightarrow i_o$, $1 \rightarrow i_o$, $x \rightarrow (x – i_o)$, $y \rightarrow (y – i_o)$

$$a \equiv m_x = \frac{\Delta P}{\Delta x} = p(i_o+1, j_o) – p(i_o, j_o)$$
$$b \equiv m_y = \frac{\Delta P}{\Delta y} = p(i_o, j_o+1) – p(i_o, j_o)$$
$$c \equiv m_{xy} = p(i_o+1, j_o) + p(i_o, j_o+1) – p(i_o, j_o) – p(i_o+1, j_o+1)$$
$$d = p(i_o, j_o)$$

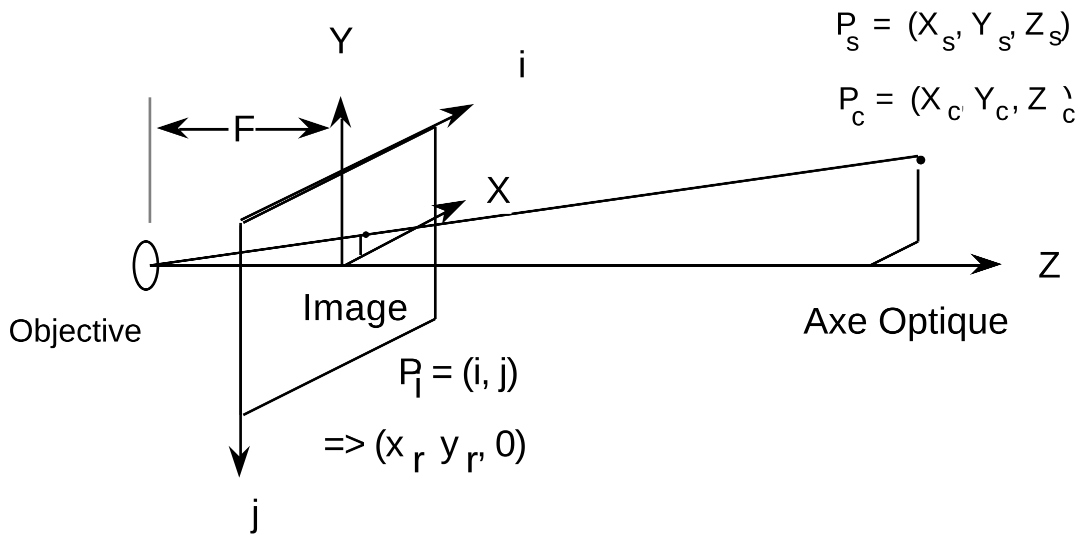
$$p(x, y) = a \cdot (x–i_o) + b \cdot (y–j_o) + c \cdot (x-i_o) \cdot (y–j_o) + p(i_o, j_o)$$

Modèle de la Caméra

Modèle de la Caméra   Géométrie Physique



Modèle Mathématique: <u>Projection Centrale</u>



Les Repères

Coordonnées de la Scène :

Point Scène : $P^s = (x_s, y_s, z_s, 1)^T$

Coordonnées de la Caméra :

Point Caméra : $P^c = (x_c, y_c, z_c, 1)^T$

Point Image : $P^r = (x_r, y_r, 1)^T$

Coordonnées de l'Image :

Point Image : $P^i = (i, j, 1)^T$

Nota : En coordonnées homogènes, les points sont invariant au multiplication par un constant.

$(i, j, 1)^T = A\cdot(i, j, 1)^T = (Ai, Aj, A)^T$

Transformations entres reperes

La modèle de la caméra est composé d'une composition de transformations.

Transformation entre repère <u>Caméra</u> et repère <u>Scène</u> :

$$P^c = \mathbf{T}_s^c P^s$$

Matrice de Projection ${}_c^r\mathbf{P}$ du repère <u>Caméra</u> vers le repère <u>Rétine</u>

$$P^r = \mathbf{P}_c^r P^c$$

Transformation entre repère image et repère caméra

$$P^i = \mathbf{C}_r^i \; w P^r$$

Composition : $P^i = \mathbf{C}_r^i \; \mathbf{P}_c^r \; \mathbf{T}_s^c \; P^s = \mathbf{M}_s^i \; P^s$

La Transformation Scène - Caméra

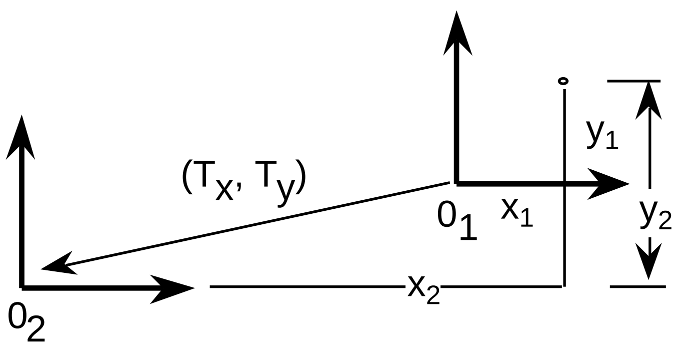
Dans les coordonnées homogènes, les translations, rotations, transformées affines et perspectives sont représentées par les produits des matrices.

La transformation $\mathbf{T}_s^c$ a la forme :

$$\mathbf{T}_s^c = \begin{pmatrix} & \mathbf{R}_s^c & & x_s \\ & & & y_s \\ & & & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

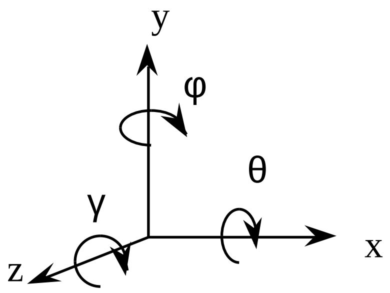
ou (x_S, y_S, z_S) est la position du repère scène dans le repere caméra.
et $\mathbf{R}_s^c$ est l'orientation du repère scène dans le repère caméra.

Translation Addition en espace cartésien
Multiplications en Coordonnées Homogènes



T est un vecteur (vecteur de translation) de P_1 vers P_2

En 3D



Au tour de l'axe X :

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}(\theta) & \mathrm{Sin}(\theta) & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}(\theta) & \mathrm{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'axe Y :

$$\mathbf{R}_Y(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\varphi) & 0 & -\mathrm{Sin}(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}(\varphi) & 0 & \mathrm{Cos}(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'axe Z :

$$\mathbf{R}_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\gamma) & \mathrm{Sin}(\gamma) & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}(\gamma) & \mathrm{Cos}(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En Générale :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} & \mathbf{R} & & \begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\gamma)\, \mathbf{R}_Y(\varphi)\, \mathbf{R}_X(\theta)$$