

# Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG

première Bimestre 2008/2007

Séance 6 :

21 mars 2008

## Bruit de Numérisation

Formule(s) du Jour :.....	2
Bruit de Echantillonnage et de Numerisation .....	3
Rappel des Probabilités.....	4
La Loi Normale.....	5
Estimations des moments d'une densité.....	6
Le premier moment : La Moyenne.....	6
Le deuxième moment (La variance).....	7
Densité de probabilité uniforme.....	8
Echantillonnage des Signaux .....	9
Quantification des Signaux.....	11
Quantification Uniforme.....	11
Quantification par arrondi :.....	13
Méthodes de conversion A/N.....	17
Méthodes Indirect : VCO.....	17
Convertisseur parallèle. (Anglais "Flash Converteur").....	17
Approximation successive.....	18
Conversion Numérique-analogique.....	19

**Formule(s) du Jour :**

Soit un signal  $x_e(nT_e)$  de plage utile (le range dynamique)  $V$ .

Le signal est décomposé en  $2^B = \frac{V}{q}$  intervalles de largeur  $q$ , par

$$x_q(n) = \text{Max}_k \{ (x_e(nT_e) - k \cdot q + \frac{q}{2}) < 0 \}$$

Si la variance du signal est  $\sigma_x^2$ , la réduction en rapport signal-bruit entraînée par la numérisation (en dB) est

$$q_{dB} = 6B + 10.8 - 20 \log_{10} \frac{V}{\sigma_x} \text{ dB}$$

## Bruit de Echantillonnage et de Numerisation

Rappel : Le bruit est tout ce qui interfère avec la récupération d'un message.  
Le bruit est mesuré en "énergie".

L'énergie d'un signal,  $x(t)$ , sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ :

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

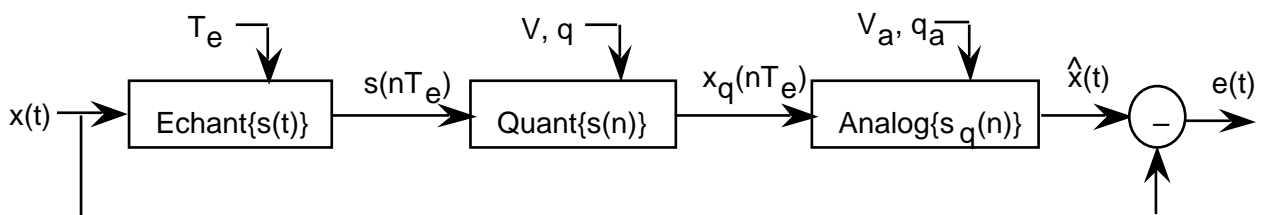
ou pour un signal discret,  $x(n)$  sur l'intervalle  $[N_1, N_2]$  :

$$W_x(N_1, N_2) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x^2(n)$$

Soit

échantillonnage :  $x(n) = \text{Echant}\{x(t)\}$  (paramètre :  $T_e$ )  
 quantification :  $x_q(n) = \text{Quant}\{x(n T_e)\}$  (paramètres :  $V, q$ )  
 Conversions Analogique :  $\hat{x}(t) = \text{Analog}\{x_q(n)\}$  (paramètres :  $T_a, V_a, q_a$ )

Cas Continu :



En signal continu, le bruit de numérisation peut être calculé comme :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Son energie est 
$$W_T = \int_0^T e(t)^2 dt$$

Le bruit est, par définition, imprévisible. Il est aléatoire. Comme toute fonction aléatoire, le bruit est caractérisé par une densité de probabilité.

## Rappel des Probabilités

Pour  $X$  entier, tel que  $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$ . On peut traiter chacun des valeurs possibles comme une classe d'événement.

Si les valeurs de  $x$  sont entières, tel que  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$  on peut estimer la probabilité a partir de  $M$  observations de la valeur,  $\{X_m\}$ .

Pour estimer la probabilité d'une valeur on peut compter le nombre d'observation de chaque valeur,  $x$ , dans une table,  $h(x)$ .

L'existence des ordinateurs avec des centaines de megabytes rendre des tables de fréquence très pratique. Dans certains domaines, comme l'analyse d'images, par abus de langage, un tel table s'appelle une histogramme.

Ainsi la probabilité d'une valeur de  $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$  est la fréquence d'occurrence de la valeur. Avec  $M$  observations de la valeur,  $X$ , on peut faire une table,  $h(x)$ , de fréquence pour chacun des valeurs possibles. On observe  $M$  exemples de  $X$ ,  $\{X_m\}$ .

Pour chaque observation on ajoute "1" à son entré dans la table.

$$m=1, M : h(X_m) := h(X_m) + 1; M := M+1;$$

$h(x)$  est une table de fréquence pour chaque  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ .

Ainsi, on peut définir la probabilité d'une valeur  $x$  par sa fréquence :

$$\text{pr}\{X_m=x\} = \lim_{M} \left\{ \frac{1}{M} h(x) \right\}$$

Quand  $M$  est fini, on peut faire appel à l'approximation.

$$\text{pr}\{X=x\} = p(x) \approx \frac{1}{M} h(x)$$

La validité de l'approximation depend dunombre de valeurs possible et de  $M$ . En règle générale, on dit qu'il faut 10 exemples par cellule de l'histogramme.

La précision de cette estimation depend de la vrai densité  $p(X)$ .

La pire de cas et une densité uniforme. Dans ce cas, on peut démontrer que l'écart type moyenne de l'erreur est en proportion avec la racine de la division du nombre de cellule de  $h(x)$ ,  $N$ , sur le nombre d'échantillons,  $M$ .

$$\text{MSE} = \frac{h(x)^2}{M}$$

Que faire si la masse d'exemple est insuffisante :  $M \ll N$ ?

Que faire si  $x$  n'est pas entier ? Il faut une fonction paramétrique pour  $p(X)$ .

### La Loi Normale

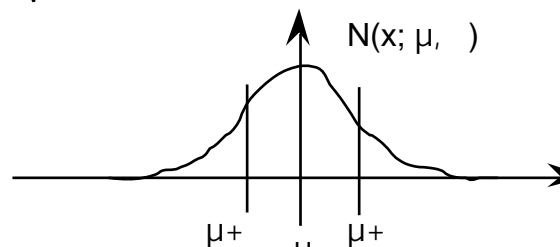
Quand les variables aléatoires sont issues d'une séquence d'événements aléatoires, leur densité de probabilité prend la forme de la loi normale,  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Ceci est démontré par le théorème de la limite centrale. Il est un cas fréquent en nature.

Les paramètres de  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  sont les premiers et deuxième moments des exemples. Donc, on peut les estimer pour n'importe quel nombre d'exemples. On peut même estimer les moments quand il n'existe pas les bornes ( $X_{\max} - X_{\min}$ ) ou quand  $X$  est une variable continue.

Dans ce cas,  $p(\cdot)$  est une "densité" et on peut utiliser  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  comme une fonction de densité pour  $p(x)$ .

$$p(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Le base "e" est :  $e = 2.718281828\dots$

Il s'agit du fonction tel que  $\int e^x dx = e^x$

Le terme  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  sert à normaliser la fonction en sorte que sa surface est 1.

$$e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\sigma^2}$$

Le terme  $d^2(x) = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$  est la distance  $x$  et  $\mu$  normalisée par la variance.

### Estimations des moments d'une densité

#### Le premier moment : La Moyenne

Soit  $M$  observations d'un variable aléatoire,  $\{X_1, X_2, \dots, X_M\} = \{X_m\}$

La moyenne est l'espérance de  $\{X_m\}$ .

$$\mu = E\{x\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m$$

Il s'agit d'une somme sur  $M$  (le nombre exemples). Cette somme existe, même quand  $X_{\min}$  et  $X_{\max}$  n'existent pas et quand  $X$  est réelle.

On note que dans le cas  $X$  est un nombre entier, on peut aussi estimer la moyenne par la table de fréquence. La masse d'un histogramme,  $h(x)$  est le nombre d'échantillons qui composent l'histogramme,  $M$ .

$$M = \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} h(x)$$

Pour  $X$  entier, tel que  $X \in [x_{\min}, x_{\max}]$  on peut démontrer que

$$\mu = E\{x\} = \frac{1}{M} \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} h(x) = \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} p(x) \cdot x$$

$$\text{donc : } \mu = E\{x\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m = \frac{1}{M} \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} h(x)$$

Pour  $X$  réel  $\mu = E\{x\} = \int p(x) \cdot x dx$

**Le deuxième moment (La variance)**

La variance,  $\sigma^2$ , est le deuxième moment de la densité de probabilité.

Pour un ensemble de  $M$  observations  $\{x_m\}$

$$\sigma^2 = E\{(X_m - \mu)^2\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (X_m - \mu)^2$$

Mais l'usage de  $\mu$  estimé avec le même ensemble, introduit un biais dans  $\sigma^2$ .

Pour l'éviter, on peut utiliser une estimation sans biais.

$$\sigma^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (X_m - \mu)^2$$

Lequel est correct ? (les deux !)

Pour  $X$  entier, tel que  $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$  on peut démontrer que

$$\sigma^2 = E\{(X_m - \mu)^2\} = \frac{1}{M} \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} h(x)(x - \mu)^2$$

Ceci est vrai parce que la table  $h(x)$  est fait de  $\{X_m\}$ .

Donc :

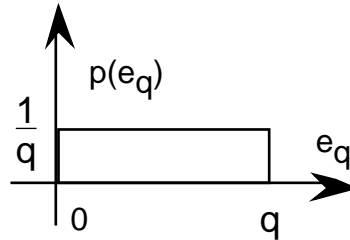
$$\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (X_m - \mu)^2 = \frac{1}{M} \sum_{x=X_{\min}}^{x_{\max}} h(x)(x - \mu)^2$$

Pour  $X$  réel on a

$$\sigma^2 = E\{(X_m - \mu)^2\} = \int p(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

**Densité de probabilité uniforme**

Soit une densité uniforme entre 0 et  $q$ .



Sa valeur est  $p(e) = \frac{1}{q}$ .

Sa moyenne est

$$\begin{aligned} \mu = E\{p(e)\} &= \int_0^q p(e) \cdot e \, de = \\ &= \int_0^q \frac{1}{q} \cdot e \, de = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2} e^2 \Big|_0^q = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2} q^2 = \frac{q}{2} \end{aligned}$$

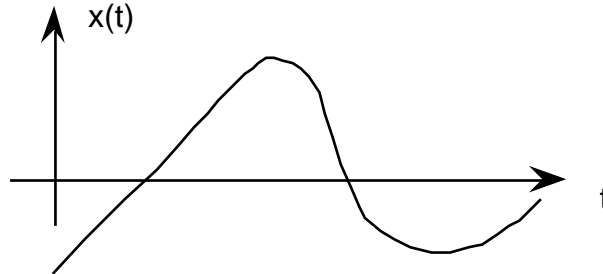
Sa variance est  $\sigma^2 = \frac{1}{12} q^2$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E\{p(e)\} &= \int_0^q p(e) \cdot (e - \mu)^2 \, de \\ &= \int_0^q \frac{1}{q} \cdot \left(e - \frac{q}{2}\right)^2 \, de = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{3} \left(e - \frac{q}{2}\right)^3 \Big|_0^q \\ &= \frac{1}{3q} \left[ \left(q - \frac{q}{2}\right)^3 - \left(0 - \frac{q}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3q} \left[ \left(\frac{q}{2}\right)^3 - \left(-\frac{q}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3q} \left[ \left(\frac{q^3}{8}\right) + \left(\frac{q^3}{8}\right) \right] = \frac{1}{3q} \left(\frac{q^3}{4}\right) = \frac{1}{12} q^2 \end{aligned}$$



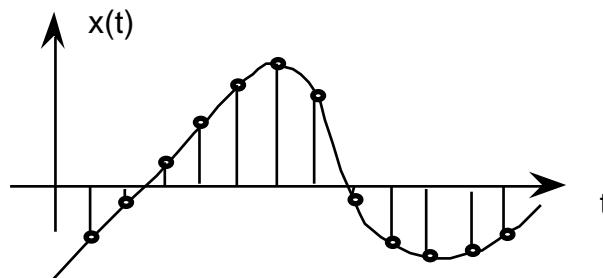
## Echantillonnage des Signaux

Soit un signal continu :

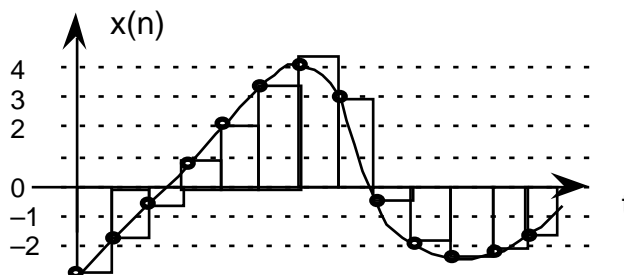


Si l'on veut traiter un signal par voie numérique à l'aide d'un ordinateur, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées régulièrement ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé échantillonnage.

Une échantillonnage représente un signal par une suite de valeurs ponctuelles :



La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de quantification et de codage, dont la nature et les conséquences sont examinées dans la prochaine séance. L'ensemble réalise une fonction de conversion analogique-numérique A/N, (Dite Analog to Digital ou A/D en Anglais).



Reversibilité : Seules les conditions théoriques, irréalisables parfaitement dans la pratique (voir théorème de Paley-Wiener), permettent une reconstitution exacte du signal analogique à partir de ses échantillons. La procédure d'échantillonnage introduit toujours une distorsion qu'il convient de limiter à un niveau acceptable.

## Quantification des Signaux

Soit un signal  $x_e(nT_e)$  de plage utile (le range dynamique)  $V$ .

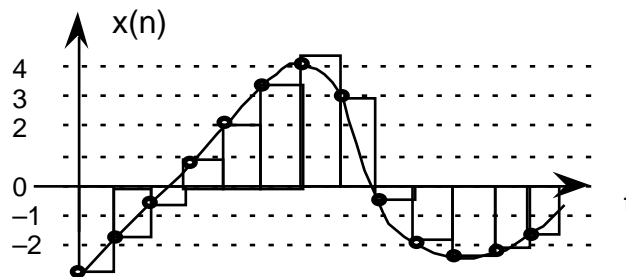
Le signal est décomposée en  $2^B = \frac{V}{q}$  intervalles de largeur  $q$ , par

$$x_q(n) = \text{Max}_k \{ (x_e(nT_e) - k \cdot q) < 0 \}$$

Pour une quantification de moyenne zéro, il faut éliminer le biais pare

$$x_q(n) = \text{Max}_k \{ (x_e(nT_e) - k \cdot q + \frac{q}{2}) < 0 \}$$

## Quantification Uniforme



Pour le suivant, nous laisserons  $T_e = 1$ .

soit  $x_q(n)$  la quantification de  $x_e(n)$ .

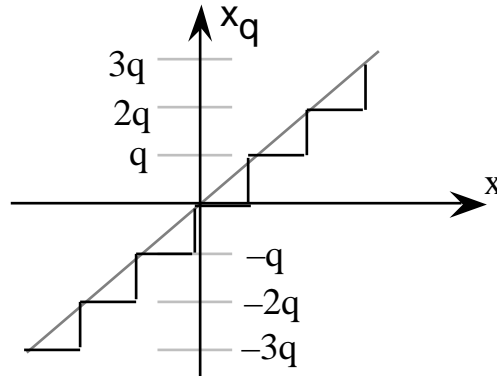
La conversion analogique numérique implique une opération qui consiste à remplacer la valeur exacte analogique de l'échantillon par la plus proche valeur approximative extraite d'un ensemble fini de valeurs discrètes.

Chaque nombre  $x_q$ , représente un ensemble de valeurs analogiques contenues dans un intervalle de largeur  $q$  appelé "pas de quantification". Lorsque la plage de conversion est subdivisé en pas de quantifications égal, on parle de quantification uniforme.

La loi de quantification la plus fréquemment utilisée est la loi uniforme (ou linéaire) dans laquelle les pas de quantification  $q_i$  sont constants.

La quantification est définie par une opération de seuillage.  
On cherche l'entier  $k$ ,

$$x_q(n) = \text{Max}_k \{ (x_e(nT_e) - k \cdot q) < 0 \}$$

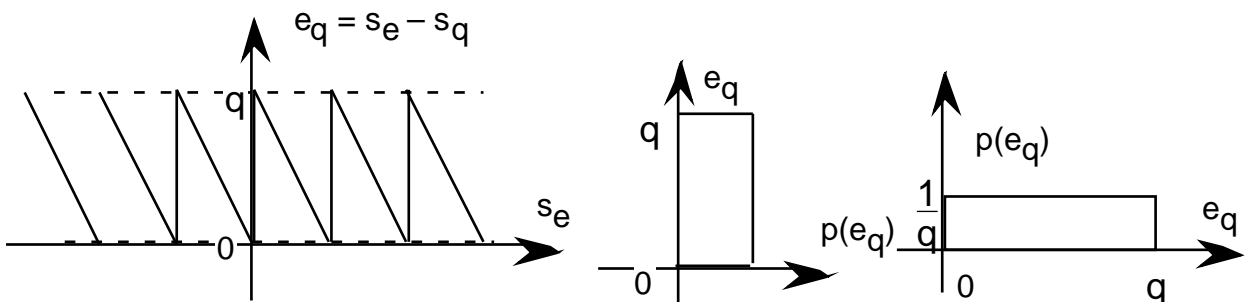


Il s'agit d'une quantification par troncature.  
Le bruit de quantification est la différence :

$$e_q(n) = x_e(n) - x_q(n)$$

Le bruit de quantification  $e_q$  est considéré comme un processus aléatoire.  
Il possède une densité de probabilité  $p(e)$

Pour une quantification uniforme, la densité de probabilité est uniforme sur l'intervalle  $[0, q]$  avec  $p(e) = \frac{1}{q}$



Une valeur moyenne  $\mu_q = 0$  indique la présence d'un biais systématique.

Si on applique le seuillage à  $x_e(t) + \frac{q}{2}$  on obtient quantification par arrondi

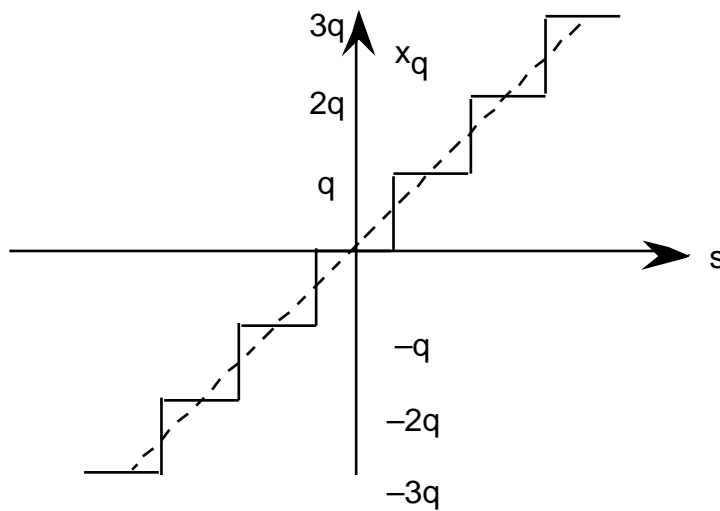
**Quantification par arrondi :**

Soit un signal  $x_e(nT_e)$  de plage utile (le range dynamique)  $V$ .

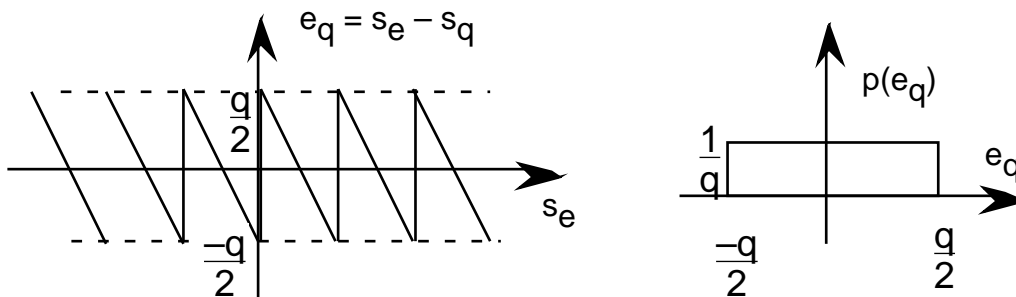
Pour le suivant, nous laisserons  $T_e = 1$ .

Le signal est décomposée en  $2^B = \frac{V}{q}$  intervalles de largeur  $q$ , par

$$x_q(n) = \underset{k}{\text{Max}} \{ (x_e(nT_e) - k \cdot q + \frac{q}{2} < 0) \}$$

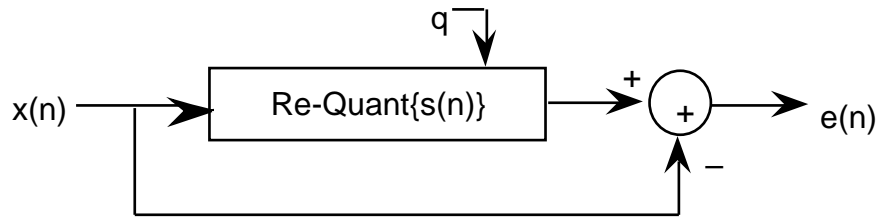


Pour une quantification uniforme, la densité de probabilité est uniforme  $p(e_q) = \frac{1}{q}$   
 Pour les valeurs quantifiées par arrondi,  $\mu_q = 0$ .



$\mu = 0$  La variance reste  $\sigma^2 = \frac{1}{12} q^2$

Soit un signal  $x(n)$ , L'effet de la quantification est mesuré par :



L'erreur est :  $e(n) = x(n) - x_q(n)$

Son energie est 
$$W_N = \sum_{n=0}^{N-1} e(n)^2 dt$$

Son valeur moyenne est Sa moyenne est

$$\begin{aligned} \mu = E\{p(e)\} &= \int_{-q/2}^{q/2} p(e) \cdot e \, de = \\ &= \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} \cdot e \, de = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2} e^2 \Big|_{-q/2}^{q/2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} \right) q^2 = 0 \end{aligned}$$

Sa variance est 
$$\sigma^2 = \frac{1}{12} q^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E\{p(e)\} &= \int_{-q/2}^{q/2} p(e) \cdot (e-\mu)^2 \, de \\ &= \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} \cdot \left(e - \frac{q}{2}\right)^2 \, de = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{3} \left(e - \frac{q}{2}\right)^3 \Big|_{-q/2}^{q/2} \\ &= \frac{1}{3q} \left[ \left(\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\right)^3 - \left(-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3q} \left[ \left(\frac{q^3}{8}\right) + \left(\frac{q^3}{8}\right) \right] = \frac{1}{3q} \left(\frac{q^3}{4}\right) = \frac{1}{12} q^2 \end{aligned}$$

Le rapport signal sur bruit de quantification est défini par

$$q = \frac{W_s}{W_n}$$

$$\text{L'énergie } W_s(N_1, N_2) = \sum_{n=N_1}^{N_2} s^2(n).$$

Si on suppose que  $E\{s\} = 0$ , la variance vaut l'énergie moyenne.

$$s^2 = \frac{1}{N_1 - N_2} W_s = \frac{1}{N_1 - N_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} s(n)^2.$$

Si  $E\{n_q\} = 0$ ,

$$q^2 = \frac{1}{N_1 - N_2} W_q = \frac{1}{N_1 - N_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} e_q(n)^2.$$

$$\text{Dans ce cas, } q = \frac{W_s}{W_n} = \frac{s^2}{q^2}.$$

Donc, le rapport Signal-Bruit peut être estimé par les densité de probabilité.

Par la formule précédent :

$$q = \frac{s^2}{\frac{q^2}{12}} = 12 \frac{s^2}{q^2}$$

et en décibels :

$$q_{dB} = 10 \log_{10} q = 10 \log_{10} \left( 12 \frac{s^2}{q^2} \right) = 2 \cdot 10 \log_{10} \left( \frac{s}{q} \right) + 10 \log_{10}(12) \text{ dB}$$

$$= 20 \log_{10} \frac{s}{q} + 10.8 \text{ dB}$$

Si la plage utile  $V$  du signal est décomposée en  $2^B$  intervalles de largeur  $q$ ,

$$2^B = \frac{V}{q} \quad q = \frac{V}{2^B} \quad \log_{10} \left\{ \frac{s}{V/2^B} \right\} = 10 \log_{10} \{2^B\} + 20 \log_{10} \left\{ \frac{s}{V} \right\}$$

et donc la réduction en rapport Signal-bruit entraînée par la numérisation est

$$q_{dB} = 10.8 + B \cdot 10 \log_{10}(2) - 20 \log_{10} \frac{V}{x} \text{ dB}$$

$$q_{dB} = 6B + 10.8 - 20 \log_{10} \frac{V}{x} \text{ dB}$$

Ainsi, pour un convertisseur analogique-numérique, où B représente le nombre de bits des valeurs de sortie, le rapport signal sur bruit de une quantification mesuré en décibels varie linéairement avec B et augmente de 6 decibel avec chaque bit supplémentaire.

## Méthodes de conversion A/N

### Méthodes Indirect : VCO

La valeur de la tension du signal d'entrée est convertie en une fréquence par une oscillateur commandé en tension. en anglais : Voltage Controlled Oscillateur (VCO).

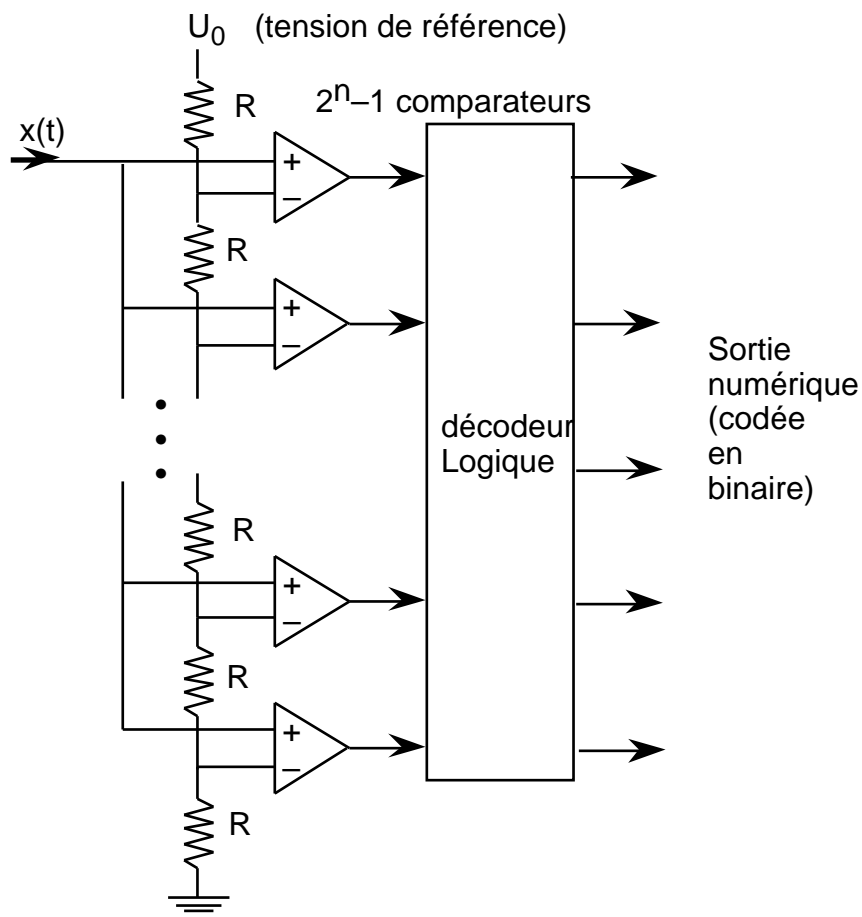
La fréquence est proportionnelle à la tension.

Ensuite on compte le nombre de passage à zéro pendant  $T$ .

### Convertisseur parallèle. (Anglais "Flash Converteur").

La tension  $x(nT)$  d'entrée est comparé à  $2^B - 1$  valeurs du type :  $k \frac{U_0}{2^B}$  déduite d'une tension de référence  $U_0$ .

Le résultat est traduite en mot binaire par un décodeur logique.



Utiliser pour la vidéo, radar, etc.

Avantage : Rapide est simple.

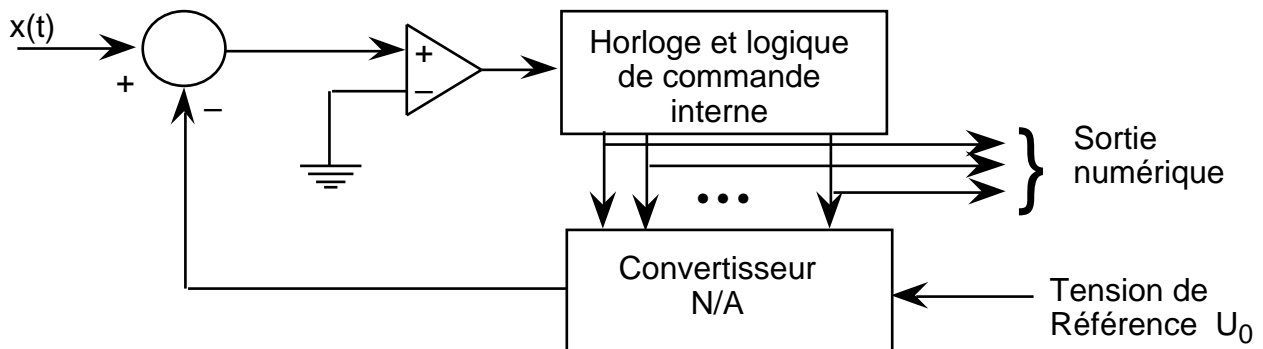
Inconvénance : Manque de précision.



**Approximation successive**

La tension d'entrée est comparé successivement à une succession de  $2^B - 1$  valeurs de référence pondérées  $k \frac{U_0}{2^N}$ .

C'est un système bouclé qui inclut un convertisseur numérique-analogique :



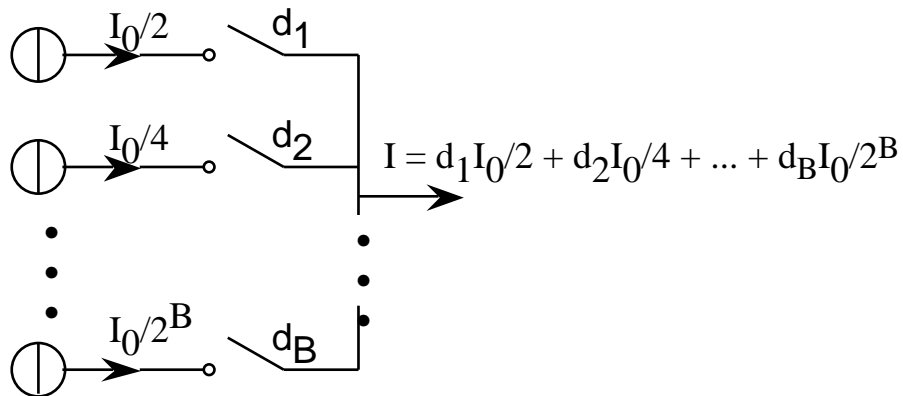
### Conversion Numérique-analogique

Un convertisseur numérique-analogique est un dispositif produisant une grandeur de sortie  $y$  qui possède  $2^N$  valeurs distinctes. Il est à loi uniforme si ces valeurs sont régulièrement réparties sur une plage de valeurs allant de zéro à  $2^N \cdot q$  selon la loi :

$$y = q (d_1 2^{B-1} + d_2 2^{B-2} + \dots + d_B 2^0)$$

où  $q$  est le pas de quantification.

Des interrupteurs commandés par les variables binaires  $d_k$  ( $d_k = 0$  interrupteur ouvert,  $d_k = 1$  interrupteur fermé) contrôlent le passage de courants pondérés  $I_0 / 2^k$  provenant de source de courant dépendant d'une référence  $I_0$  vers un point de sommation.



Dans la pratique, tous les interrupteurs ne réagissent pas exactement au même instant. Il ne résulte des parasites de commutations (“Glitches” en anglais) qui doivent être éliminés par filtrage.