Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG deuxieme semestre 2008/2009
Séance 2 : 13 février 2009

Formes Numérique de la Transformée de Fourier

Formule du Jour : La Transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Pourquoi "e" ?

"e" est la base tel que $\int e^{x}\, dx = e^{x}$ $\left(\text{On note que : } \int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}\right)$

Qu'est ce que "e" signifie ?

$$e = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right\} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2.7182818284\ldots$$

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}\right\} = 1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \ldots = (2.7182818284\ldots)^{x}$$

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \ldots \\ &= 1 + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \ldots + jx + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \ldots + j\,x - j\frac{(x)^3}{3!} + j\frac{(x)^5}{5!} - \ldots \\ &= \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}(x) \end{aligned}$$

Avec une exposante complexe, e^{jx} prend la forme d'une oscillation :
La relation d'Euler : $e^{jx} = \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}(x)$

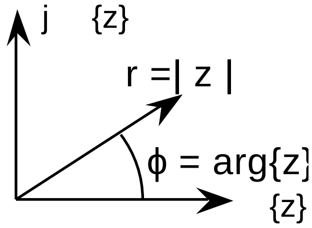
On note que :

$$e^{jx} + e^{-jx} = \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}(x) + \mathrm{Cos}(x) - j\,\mathrm{Sin}(x) = 2\,\mathrm{Cos}(x)$$

$$e^{jx} - e^{-jx} = \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}(x) - \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}(x) = 2j\,\mathrm{Sin}(x)$$

Rappel : pour un complexe

$$z = \{z\} + j\ \{z\} = z_r + j\, z_i = r\, e^{j\phi}$$
$$= |z|\, e^{j\phi} = r\, e^{j\phi}$$
$$= r \cos(\phi) + j\, r \sin(\phi)$$



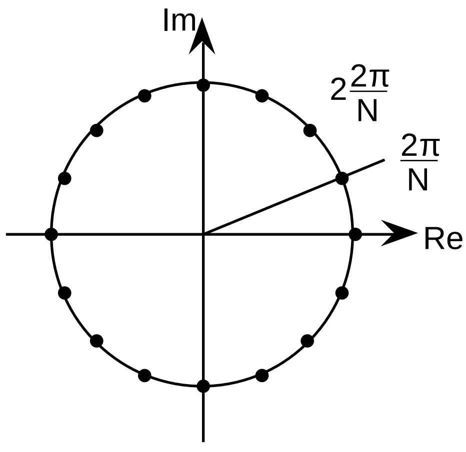
$$r = \sqrt{z_r^2 + z_i^2} \qquad \phi = \text{Arg}\ \{z\} = \text{Tan}^{-1}\{\frac{z_i}{z_r}\}$$

L'exponentielle Complexe est un angle dans la plane complexe :

$$e^{jx} = \text{Cos}(x) + j\ \text{Sin}\ (x)$$
$$e^{j\pi/4} = 0.707 + j\ .707$$
$$e^{j\pi/2} = 0 + j$$
$$e^{j3\pi/4} = -0.707 + j\ .707$$
$$e^{j\pi} = -1 + j\ 0$$

Note que :

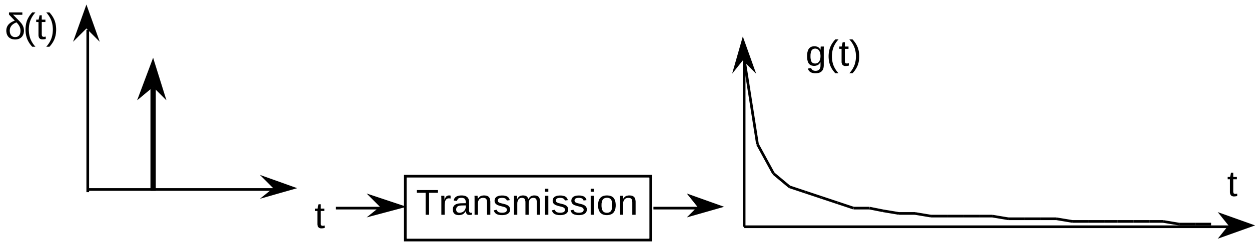
$$\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^n = e^{-j\, n\frac{2\pi}{N}} = \left(\text{Cos}\ (\frac{2\pi}{N}) - j\ \text{Sin}(\frac{2\pi}{N})\right)^n = \text{Cos}\ (n\frac{2\pi}{N}) - j\ \text{Sin}(n\frac{2\pi}{N})$$



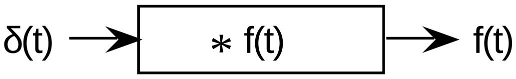
L'exponentielle Complexe, $e^{j\alpha}$, est un retard en temps.

$$e^{j\omega t}\, e^{j\alpha} = e^{j(\omega t+\alpha)} = \text{Cos}(\omega t + \alpha) + j\ \text{Sin}(\omega\, t + \alpha)$$

Le Convolution



Un système linéaire est modélisé par sa réponse à une impulsion, $\delta(t)$.



Réponse Impulsionnelle : $f(t) = f[\delta(t)]$.

La réponse d'un système linéaire a une entrée x(t) est une superposition (une somme) de réponses impulsionnelle amplifiées par les valeurs instantanées de x(t). Cette opération est appelé le "Convolution" de x par f.

L'équation générale de la convolution est une somme de réponse impulsionnelle pour les réponses. La convolution est commutative.

$$y(t) = x * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\ f(\tau)\, d\tau = f * x(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ f(t-\tau) d\tau$$

La **<u>convolution</u>** est l'opération de traitement de signale la <u>plus</u> <u>fondamentale</u>. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant t est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation x(t). La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle f(t).

<u>Convolution Numérique</u>

Les séquences apériodiques sont supposées d'exister avec valeurs nuls hors de leur intervalle de définition.

Exemple : Considère les deux séquences numériques apériodiques non-nul sur les intervalles de duration N_x et N_h.
Soit x(n) de non-nul pour n $[0, N_x-1]$ et f(n) de non-nul pour n $[0, N_h-1]$.

$x(n) \quad 0 \leq n \leq N_x-1,$
$f(n) \quad 0 \leq n \leq N_f-1$

La convolution apériodique de x(n) et f(n) est une produit scalaire pour chaque m

$$y(m) = x * f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot f(m-n) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(m-n) \cdot f(n)$$

Ce produit est potentiellement non-nul sur un intervalle de durée N_x+N_h-2.

$$y(m) = x * f(m) = \sum_{n=0}^{N_x+N_h-2} x(n) \cdot f(m-n) = \sum_{n=0}^{N_x+N_h-2} x(m-n) \cdot f(n)$$

La taille du résultat potentiellement non-nul est de $N_x + N_h - 1$ échantillons.

Demonstration. La première valeur non nul est créé pour

$n = 0$: $x(m)$ non-nul pour $0 \leq m \leq N_x-1$,
$h(n-m)$ non-nul pour $h(n)$ $-N_h+1 \leq m \leq 0$

$n = N_x + N_h - 1$: $x(n)$ non-nul pour $0 \leq n \leq N_x-1$,
$h(n-m)$ non-nul pour $h(n)$ $N_x - 1 \leq m \leq N_x + N_h - 1$
ie. $(n-N_h-1 < m < n)$

La Transformée de Fourier

L'analyse harmonique d'un signal déterministe est l'instrument de base de la théorie et du traitement du signal. Cette analyse harmonique, obtenue par la transformation de Fourier, est une représentation spectrale des signaux. Elle exprime la répartition en fréquence de l'amplitude et de la phase de l'énergie ou de la puissance d'un signal. Il existe plusieurs formulations de cette transformation :

Sortes de Transformées de Fourier

Transformée	temps	fréquence
TF Transformée de Fourier classique	continu infini	continue infinie
TFD Transformée de Fourier Discrète	discret périodique	discrète périodique
TFTD Transformée de Fourier en Temps Discrète	discret fini	continue, périodique

La Transformée de Fourier classique une outil d'analyse pour les fonctions.

Elle s'agit d'un outil d'analyse "symbolique".
Elle est presque toujours calculée "à la main".

La Transformée de Fourier Discrète s'applique aux séquences numériques.
Elle est numérique et presque toujours calculer "par logiciel".
Elle transforme une séquence x(n) de N échantillons,
à une séquence X(k) de N échantillons

La Transformée de Fourier en Temps Discrète une outil d'analyse des séquences numériques.
Elle permet d'exprimer la "fonction de transfert" d'une convolution numérique.
Elle décrit un filtre comme une suite des exponentiels.
Elle peut être fait à la main pour les petites séquences, et par logiciel pour
les grandes séquences

La Transformée de Fourier d'un signal continu

Soit x(t) un signal complexe déterministe.
La transformée de Fourier est une fonction complexe de la variable réelle $\omega = 2\pi f$ définie par :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

La transformée inverse est donnée par :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{ X(\omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

La symétrie de ces formulations montre l'existence d'une dualité temps-fréquence

Convolution en temps est équivalent d'un produit en domaine Fourier.

$$y(t) = x(t) * f(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega)\, F(\omega)$$

et par principe de dualité : $y(t) = x(t) \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega) * F(\omega)$

Condition d'existence :

Pour qu'une fonction x(t) possède une transformée de Fourier il faut et il suffit que:

- la fonction x(t) soit bornée.
- l'intégrale de x(t) entre $-\infty$ et ∞ ait une valeur bornée.
- les discontinuités de x(t) soient en nombre fini.

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ est une fonction COMPLEXE.

$$X(\omega) = \{X(\omega)\} + j \{X(\omega)\} = | X(\omega) |\, e^{j\phi(\omega)}$$
$$= | X(\omega) | \cos(\phi(\omega)) + j\, | X(\omega) | \sin(\phi(\omega))$$

Le module $| X(\omega) | = \sqrt{\{X(\omega)\}^2 + j \{X(\omega)\}^2}$ est le “spectre d’amplitude”.

L’argument $\phi(\omega) = \arg(X(\omega) = \text{Arc Tan}\left(\frac{\{X(\omega)\}}{\{X(\omega)\}}\right)$ est le “spectre de phase”.

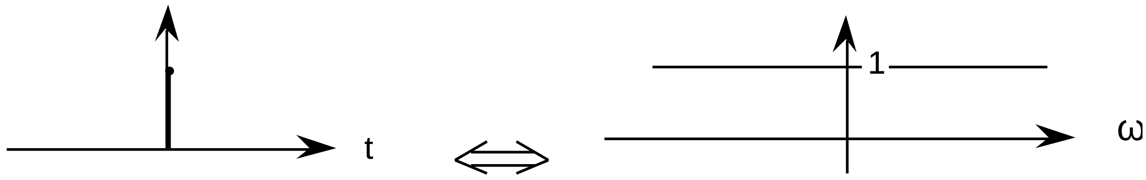
Quelques Exercices en Transformée de Fourier

Transformée de FOURIER du delta

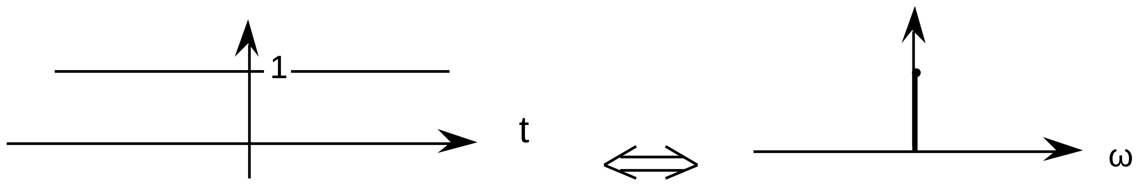
Démontre que $\mathcal{F}\{\ \delta(t)\ \} = 1$ et $\mathcal{F}^{-1}\{\ \delta(\omega)\ \} = 1$

Transformée de FOURIER du signal delta :

a) $\mathcal{F}\{\ \delta(t)\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega 0} = \mathrm{Cos}\,(0) + j\ \mathrm{Sin}\,(0) = 1.$



b) $\mathcal{F}^{-1}\{\ \delta(\omega)\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = e^{jt0} = \mathrm{Cos}\,(0) + j\ \mathrm{Sin}\,(0) = 1.$



Sinus Cardinale - La Transformée Rect(t)

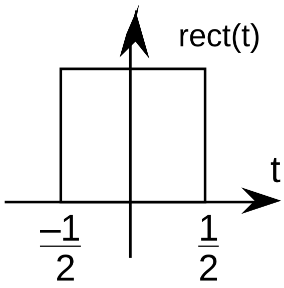
Calculer $\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\}$

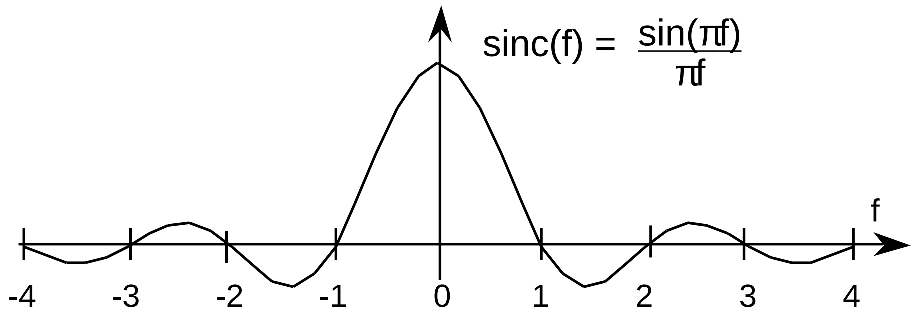
Reponse : Rappel que $e^{x} - e^{-x} = 2j\sin(x)$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right] = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{\mathrm{Sin}(\pi f)}{\pi f} \triangleq \mathrm{Sinc}(f)$$

ou bien $\triangleq \mathrm{Sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$ si $\omega = 2\pi f$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \frac{\mathrm{Sin}(\pi f)}{\pi f} \equiv \mathrm{Sinc}(f)$$





<u>Transformée de FOURIER du Cosinus</u>

Déterminer $\mathcal{F}\{ \mathrm{Cos}(\omega_o t) \}$

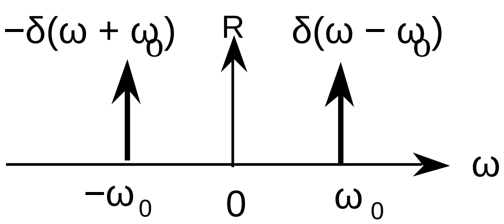
Réponse : La Transformée d'un cosinus de fréquence ω_o est une somme de 2 impulsions en ω_o et $-\omega_o$: $\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)$

$$\mathcal{F}^{-1}\{ \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)) \}$$

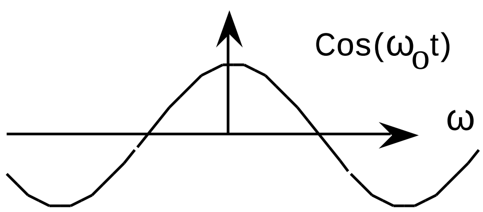
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} (\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_o)\, e^{j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_o)\, e^{j\omega t}\, dt)$$

$$\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \cos(\omega_o t)$$



$\Longleftrightarrow$



Transformée de FOURIER du Sinus

Déterminer $\mathcal{F}\{ \text{Sin}(\omega_0\, t) \}$

Réponse :

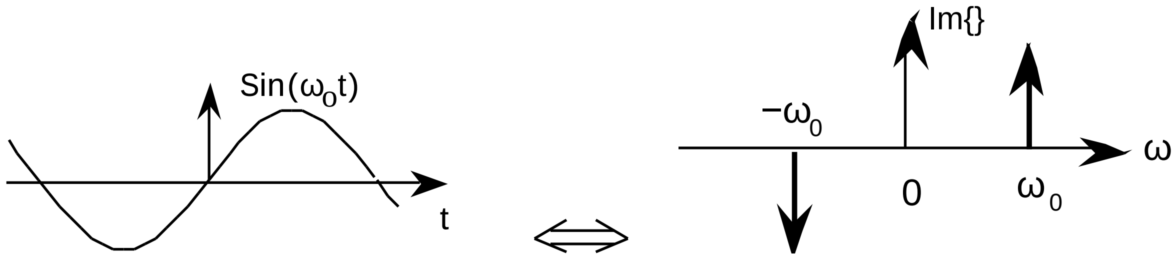
La Transformée d'un sinus de fréquence ω_0

$$\mathcal{F}^{-1}\{ \; \frac{1}{2} \; (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \; \}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \, e^{j\omega t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} (\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \, e^{j\omega t} \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0) \, e^{j\omega t} \, dt)$$

$$\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \text{Sin}\,(\omega_0 t)$$



d'où la notion de fréquence négative qui n'a de sens que pour représenter des signaux réels dans l'espace fréquence :

Transformée de Fourier d'un signal numérique

La Transformée de Fourier de Temps Discrète (TFTD) ou "DTFT" en Anglais.
est défini par :

$$\boxed{F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, e^{-j\omega m}}$$

Intérêt : Convolution en domaine "n" est équivalente d'un produit en domaine ω

$$y(n) = x(n) * f(n) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega)\, F(\omega)$$

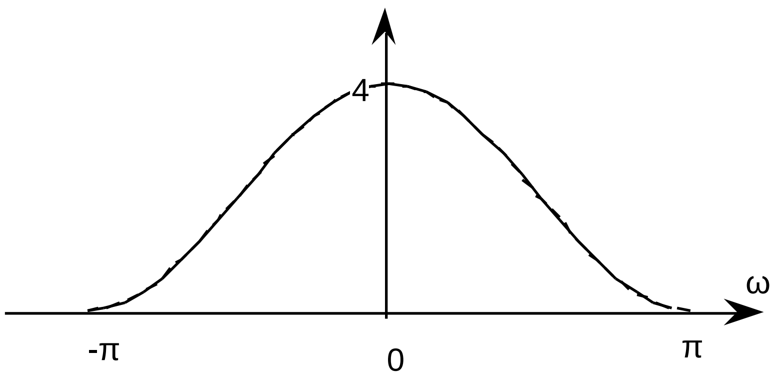
$$y(n) = x(n) \cdot f(n) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega) * F(\omega)$$

F(ω) décrit l'effet sur chaque fréquence d'une filtre f(n).

Exemple :

Soit la séquence f(n) = 1 2 1 pour n = –1, 0, 1

$$F(\omega) = 1\, e^{-j\omega(-1)} + 2\, e^{0} + 1\, e^{-j\omega(1)} = 2 + e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2 + 2\cos(\omega).$$



La TFDF est définie pour TOUS les valeurs de ω.
Mais il est périodique, avec une période de 2π.
On utilise l'intervalle $-\pi < \omega \leq \pi$

$\omega = 2\pi f$ donc périodique entre $-\frac{1}{2} < f \leq \frac{1}{2}$

Le Sinus Cardinal d'une séquence numérique

$w_N(n)$ est une fenêtre rectangulaire ou fonction de porte (parfois appelé $rect_N(n)$)

$$w_N(n) \triangleq \begin{cases} 1 & 0 \le n < N \\ 0 & n < 0 \text{ et } n \ge N \end{cases}$$

$$W_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n$$

afin de simplifier l'algebre, on substitue : $z = e^{-j\omega}$

il nous faut identité : $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1}$

Demonstration : $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = (1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1})$

$$z\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = z(1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1}) = (z^1 + z^2 + ...+z^{N-1} + z^N)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n - z\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = (1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1}) - (z^1 + z^2 + ...+z^{N-1} + z^N)$$

$$(1-z)\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = (1 - z^N)$$

donc $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$

avec

$$W_N(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z^{N/2}}{z^{1/2}} \frac{(z^{-N/2} - z^{N/2})}{(z^{-1/2} - z^{1/2})} = z^{(N-1)/2} \frac{(z^{-N/2} - z^{N/2})}{(z^{-1/2} - z^{1/2})}$$

donc pour $z = e^{-j\omega} = e^{-j2\pi f}$

$$W_N(f) = e^{-j\pi(N-1)f} \frac{(e^{-j2\pi nfN/2} - e^{j2\pi nfN/2})}{(e^{-j2\pi nf/2} - e^{j2\pi nf/2})} = e^{-j\pi f(N-1)/2} \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$

ou bien

$$W_N(\omega) = e^{-j\omega(N-1)/4} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

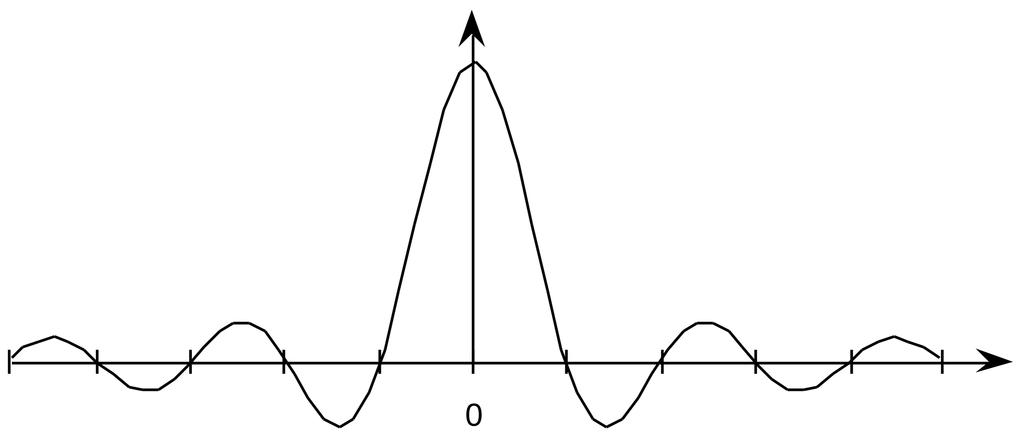
Il s'agit de l'équivalent numérique à sinc(πf) avec un décalage de $\frac{(N-1)}{2}$

Si on avez défini w(n) avec un nombre impair de coefficients, centré sur zéro :

$$w_N(n) \triangleq \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n < N/2 \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

puis :

$$W_N(f) = \frac{(e^{-j2\pi nfN/2} - e^{j2\pi nfN/2})}{(e^{-j2\pi nf/2} - e^{j2\pi nf/2})} = \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$



<u>Idempotence avec Convolution du Sinus Cardinale</u>

Le fait de limiter un signal à N échantillons est équivalent de multiplier par $w_N(n)$.

$$\boxed{w_N(n) \text{ est idempotent sur toute séquence numérique non-null sur } [0, N-1]}$$

$$x(n) = x(n) \cdot w_N(n)$$

en domaine Fourier :

$$\mathcal{F}\{ x(n) \cdot w_N(n)\} = X(\omega) * W_N(\omega).$$

Le spectre $X(\omega)$ de tout signal de duration fini, $x(n)$, est convolu par $W_N(\omega)$.

Définition de la Transformée de Fourier Discrète

(TFD ou DFT en Anglais)

Définition : Soit une séquence de N échantillons x(n) pour n [0, N–1]

$$\boxed{\mathrm{TFD}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\; e^{-jn\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\; W_N^{nk}}$$

La TFD comprend des fréquence de k cycles sur N échantillons, k $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$

TFD Inverse :

$$\boxed{\mathrm{TFD}^{-1}\{X(k)\} = x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\; e^{jk\frac{2\pi n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\; W_N^{-nk}}$$

Intérêt :

Il existe des algorithmes qui permettent de calculer cette transformée d’une séquence de N échantillons avec un coût de calcul N Log_2 N multiplications.
Ceci permet un filtrage rapide par multiplications dans le domaine Fourier.
Si N est 2^p, on peut utiliser l’algorithme rapide (FFT) de Cooley - Tukey.

Interpretation en Algèbre Linéaire

La transformée de Fourier Discrète peut être vue comme une transformation linéaire appliqué au vecteur x(n) afin de rendre le vecteur X(k).
Les lignes de cette transformation sont les complexes exponentiels.

$$X(k) = \mathbf{F}\, x(n)$$

F est une matrice avec les coefficients $f_{kn} = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi j\frac{0\cdot 0}{N}} & e^{-2\pi j\frac{0\cdot 1}{N}} & \dots & e^{-2\pi j\frac{0\cdot (N-1)}{N}} \\ e^{-2\pi j\frac{1\cdot 0}{N}} & e^{-2\pi j\frac{1\cdot 1}{N}} & \dots & e^{-2\pi j\frac{1\cdot (N-1)}{N}} \\ & & \dots & \\ e^{-2\pi j\frac{(N-1)\cdot 1}{N}} & e^{-2\pi j\frac{(N-1)\cdot 2}{N}} & \dots & e^{-2\pi j\frac{(N-1)\cdot (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Note que les coefficient X(k) sont périodique en k avec période N.
Donc X(–N/2) = X(N/2), X(–N/2+1) = X(N/2+1), X(–1) = X(N–2) etc.

Propriétés de la Transformation de Fourier

Propriétés de symétrie : (Parité)

si $x(t)$ est réel :

Temps	Fréquence
pair	réel
impaire	imaginaire

si $X(\omega)$ est réel :

Temps	Fréquence
réel	pair
imaginaire	impaire

Linéarité $\quad a\,x(t) + b\,y(t) \Leftrightarrow a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$

Dualité avec convolution :

$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(\omega)\,Y(\omega)$
$x(t)\,y(t) \Leftrightarrow X(\omega) * Y(\omega)$

Translation (théorème du retarde) :

$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)\; e^{+j\omega t_0}$
$x(t)\, e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega+\omega_0)$