Traitement Numérique du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG Deuxième Sémestre 2008/2009

Séance 6 : 23 mars 2009

Le Filtrage Recursif

Formule du Jour : Filtrage Récursif

Les filtres récursifs sont définis par une équation de récurrence.
Le filtre est spécifié par deux jeux de coefficients a(n), $0 \leq n<N$ et b(n), $0< n<N$:

$$\boxed{y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, x(k-n) \; - \; \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, y(k-n)}$$

Le fonction de Transfert, en domaine Z est :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{-n} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, z^{-n}}$$

Il faut qu'au moins un des coefficients a(n) soit non-nul et que les racines de la denominateur ne soit pas les même que les numérateur.

La transformée en Z

Défnition : Soit un signal discrèt x(n). non null pour n > 0.

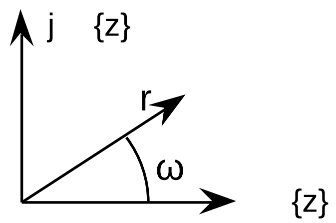
La transformée en Z est définie par

$$\boxed{X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

ou z est une variable complexe et où X(z) est un fonction complexe de la variable z.
La transfomée en Z est une fonction complexe définie sur la plan complexe.

Rappelle : Représentation polaire d'un variable complexe et le plan Z :

$$z = \{z\} + j\ \{z\} = r\, e^{j\omega}$$



La transformé en z peut être considéré comme une généralisation de la transformation de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier.

La transformée en z constitue l’outil privilégie pour l’étude des systèmes discrets.
Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace.

Par exemple, la transformée en z permet de représenter un signal possédant un infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombre.

Lien avec la transformé de Fourier

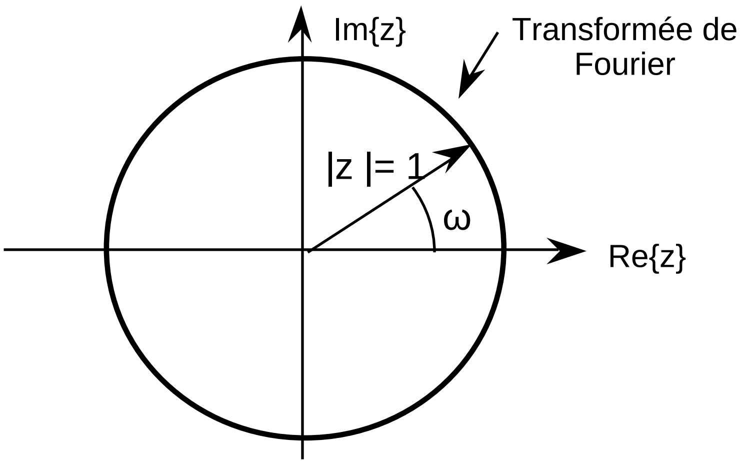
Soit $z = r\,e^{j\omega}$

Donc $X(z) = X(r\,e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,r^{-n}\,e^{-j\omega n}$

Pour $|r| = 1$, $X(z) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,e^{-j\omega n}$

Donc, la transformé de Fourier est un transformé de z pour lesquelle $|z| = 1$.

On peut trouver la transformée de Fourier sur l'anneau $|z| = 1$



Filtres Récursif

Une opération de filtrage définie par une opération linéaire “récursive”.
Ces filtres sont connu par nom filtres à Réponse Impulsionelle Infinie (IIR)
Forme générale des filtres recursifs

Exemple d'un filtre récursif du premier ordre

Considêr un compte d'epargne avec versemement annuel d'intêret .

Soit : n : année

x(n) : virement au compte (soit $x(n) = 0 \quad n < 0$)

y(n) : solde du compte

α : taux d'interet

$b = 1 + \alpha$

Simulation :

Soit $x(0) = \delta(n)$

$y(0) = x(0)$

$y(1) = x(1) + b\, y(0)$

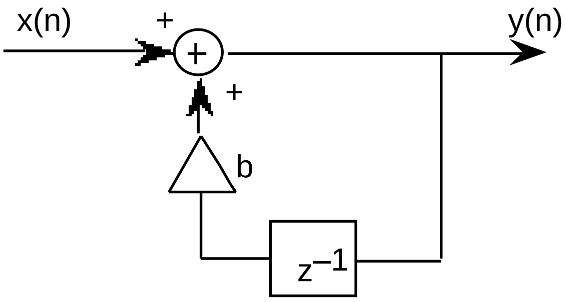
$y(2) = x(2) + b\, y(1)$

$y(n) = x(n) + b\, y(n-1)$

Il s'agit d'un filtre recursif du premier ordre,
définie par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) = x(n) + b\ y(n-1)$$

où a est une constante réelle. Un tel filtre est réalisé par une structure du forme :



où z^{-1} est un rétard de ΔT.

Fonction de Transfert :

La ratio de la sortie sur l'entrée : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

On peut écrire :

$$Y(z) = X(z) + Y(z)\, b\, z^{-1} \Rightarrow Y(z)\,(1 - b\, z^{-1}) = X(z)$$

et donc :

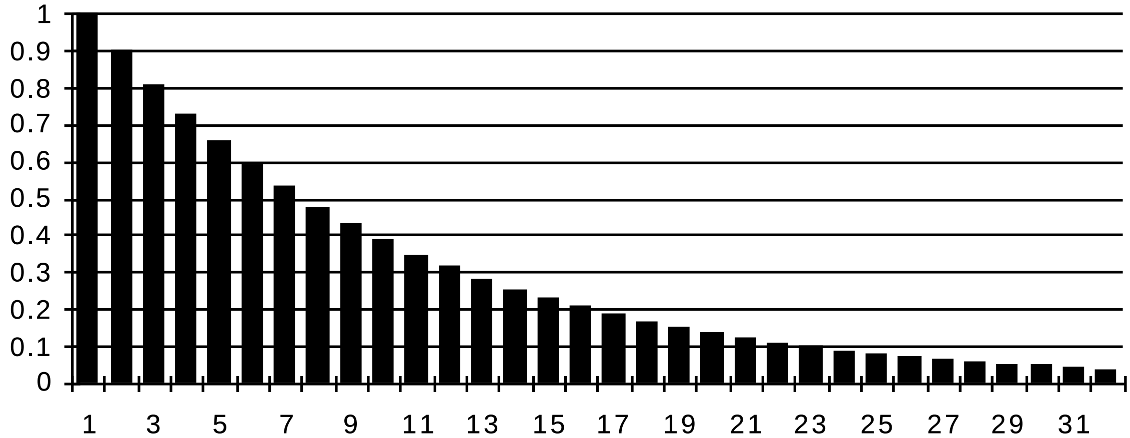
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - b\, z^{-1}}$$

Note que cette ratio a une pôle (valeur infinie) à : $1 - b\, z^{-1} = 0$

ou bien quand $b\, z^{-1} = 1$ ou $z^{-1} = \frac{1}{b}$ ou $z = b$

La réponse impulsionnelle est donnée par $h(n) = b^n$

Exemple : b = 0.9



En domaine Fourier :

$$H(\omega) = H(z = e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n\, e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - b\, e^{-j\omega}}$$

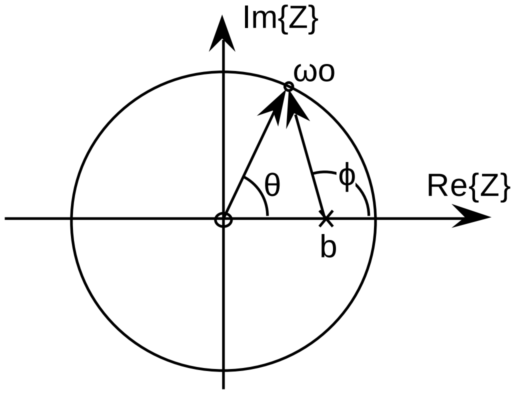
$$H(\omega) = |\, H(\omega)\,|\ \varphi\{H(\omega)\} = \frac{1}{[1 + b^2 - 2b\cos(\omega)]^{1/2}}\left[\omega - \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega) - b}\right]$$

$h(n) = b^n\, u(n)$. (avec $|b| < 1$)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} = \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{z}{z - b}$$

Un zéro pour $z_1 = 0$ et un pôle pour $p_1 = b$.

Pour chaque fréquence ω_0 : $H(\omega_o) = \dfrac{1}{1 - b\, e^{-j\omega_o}} = \dfrac{e^{j\omega_o}}{e^{j\omega_o} - b}$



La transformé de Fourier est une transformée de z pour lesquelle $|z| = 1$.

La numérateur est un vecteur joignant l'origine au point $z = e^{j\omega_o}$
La dénominateur est la différance de deux vecteurs.

La module de $X(\omega_o)$ est la rapport des modules de $|e^{j\omega_o}|$ et $|e^{j\omega_o} - b|$
La phase et la différence d'angles fait par ce deux vecteurs avec l'axe réel.

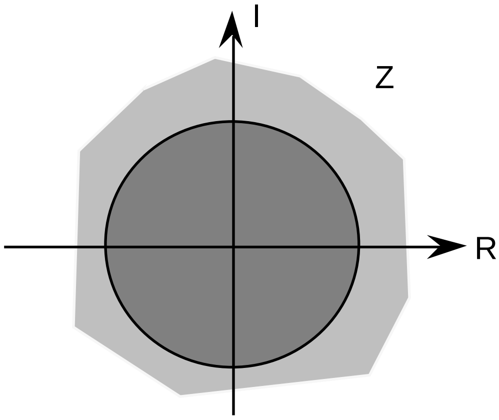
On note que la module est proportional à l'inverse de la distance avec la pôle (parce que la zéro est à l'origine.

Stabilité d'un filtre de premier ordre :

La stabilité d'un filtre est définit par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} | h(n) | < \infty$$

La filtre recursif de premier ordre a : $h(n) = b^n$
Elle est stable quand $| b |< 1.0$.



Le condition de stabilité est que les racines du denominator (les pôles) se trouve à l'intérieur du cercle : $| z | = 1.0$.

(un compte banquaire est stable si sa solde reste bornée :-))

Exemples de la transformée en Z

a) L'impulsion unité : $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$X(z) = Z[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)\, z^{-n} = 1$$

Avec convergence pour tout z.

b) L'échelon unité $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$Z[u(n)] = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Avec convergence pour $| z | > 1$. Donc $R_{x-} = 1$ $R_{x+} = \infty$

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} - z^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n}\right) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots) - z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots)$$

$$(1 - z^{-1})\left(\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n}\right) = 1 - z^{-\infty} = 1$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} = \frac{1 + z^{-\infty}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Note que la racine de la denominator est $|z| = 1$.
Il s'agit d'un "pôle" du U(z). La domaine de convergence est borné par le plus grand pole.

c) La Rampe : $r(n) = \begin{cases} n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, z^{-n} = 1\ z^{-1} + 2\ z^{-2} + \dots = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

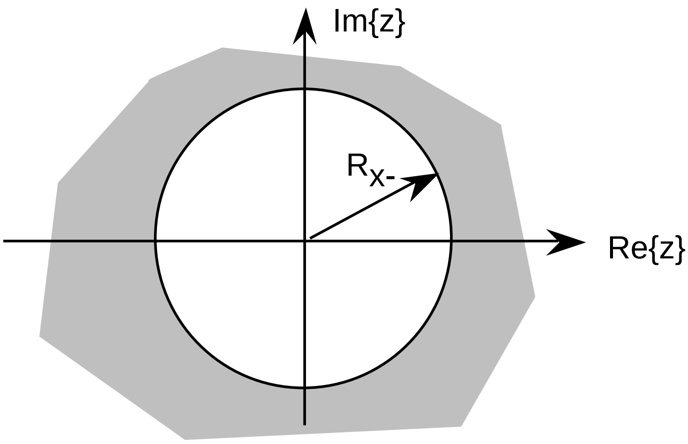
Convergence pour $|z| > 1$ $R_{x-} = 1$ et $R_{x+} = \infty$

d) Exponentiel $x(n) = b^n\, u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n\, u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\,b\, z^{-1}\,)^n = \frac{1}{1-b\, z^{-1}}$$

Avec convergence pour $|z| > |b|$

On a $R_{x-} = |b|$ et $R_{x+} = \infty$



e) Exponentiel $x(n) = b^n$

$R_{x-} = |b|$ et $R_{x+} = |b|$ et donc la serie ne converge pas.

Les Propriétés de la Transformée en Z

Propriété de Linéarité

soit $x(n) = a\, x_1(n) + b\, x_2(n)$

Alors $X(z) = a\, X_1(z) + b\, X_2(z)$ avec convergence au moins dans les régions de convergence de $X_1(z)$ et $X_2(z)$.

$R_{x-} = \max\{ R_{x_1-}, R_{x_2-}\}$
$R_{x+} = \min\{ R_{x_1+}, R_{x_2+}\}$

Si les zéros éventuels introduits par la combinaison linéaire compensent certain pôles, la région de convergence de $X(z)$ peut être plus grande.

Rétard d'un signal

si $y(n) = x(n - n_o)$

alors $Y(z) = z^{-n_o} X(z)$ pour $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Commentaires :

Le produit avec z^{-1} correspond à un retard d'une échantillon $n_o = 1$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow x(n-1)$$

<u>Dérivée de la transformée en z</u>

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)\, x(n)\, z^{-n-1}$$

en multipliant les deux coté par –z on obtient

$$-z\,\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x(n)\, z^{-n}$$

La derivée d'une tranformée en z multiplié par -z
est la transformtion en z du signal multiplié par le signal y(n) = n.

<u>Convolution de deux signaux discret</u>

La convolution est définie par

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k)$$

La transformé en z est $Z\{x(n) * y(n)\} = X(z)\, Y(z)$

Transformation en Z inverse

Il y a 3 methodes de découvrir h(z) à partire de H(z) :

1) Développement par division
2) Relation Intégrale
3) Développement en série de Puissance

Développement par division

On exprime :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\prod_{m=1}^{M}(z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N}(z - p_n)} = \frac{a_0 + a_1\, z^{-1} + \ldots + a_N\, z^{-N}}{1 + b_1\, z^{-1} + \ldots + b_N\, z^{-N}}$$

Ensuite on fait le division de Y(z) par X(z). La suite de coefficients est h(n)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h(n)\, z^{-n}$$

Relation Intégrale

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

Valable pour tout les valeur de n, le contour d'intégration Γ doit être dans la région de convergence. Il doit être fermé et il foi entourer l'origine du plan des z dans le sens positif (sens invers des aiguilles d'une montre).

On evalue l'intégrale par la méthode des résidus. La théoreme de Cauchy sur l'intégrale le long d'un contour indique que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)\, z^{n-1}\, dz = \sum \text{résidus de } X(z)\, z^{n-1} \text{ dans } \Gamma.$$

à un pôle (z=a) d'ordre 1, la résidu du fonction $[X(z)\, z^{n-1}]$ est donnée par

$$\mathrm{Res}_{a}^{1} = \lim_{z \to a} \left\{ (z - a)\, X(z)\, x^{n-1} \right\}$$

à un pôle (z=a) d'ordre q, la fonction $[X(z)\, z^{n-1}]$ est donnée par

$$\mathrm{Res}_a^q = \lim_{z \to a} \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \{ X(z)\, x^{n-1} (z-a)^q \} \right\}$$

En calculant tous les résidus aux pôles de la contion $[X(z)\, z^{n-1}]$ à l'intérieur du contour Γ, on obtient par sommation le signal x(n).

Developpement en série de Puissance

Comme la transformé X(z) est une fonction analytique de z dans la région de convergence, on peut développe en série de Taylor en fonction de z^{-1}.

On peut, ensuite, trouver les series par identification avec les series connu.

Exemple :

Considérons une transformée en z

$$X(z) = \exp\{z^{-1}\}\ (1 + z^{-1})$$

Le dévelopement en série de Taylor donne :

$$X(z) = \exp\{z^{-1}\}\ (1 + z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}\ z^{-n}$$

on comparant sa avec la définition d'une transformée en z, on deduit

$$x(n) = \frac{(n+1)}{n!}\ u(n)$$

Filtrage Récursif

Les filtres récursifs sont définis par une équation de récurrence.
Le filtre est spécifié par deux jeux de coefficients a(n), $1 < n < N_a$ et b(n), $0 \le n < N$:

$$\boxed{y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, x(k-n) \; - \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, y(k-n)}$$

Note que pour n<1, b(n) est necessairement nul parce que y(k-n) n'est pas encore calculé.

en générale $N_a \le N$ et il est dit que le filtre est d'ordre N.
Si $N_a > N$ on considere le filtre d'etre une cascade d'un filtre d'ordre N et un filtre d'ordre $(N-N_a)$.

Sauf quelques exceptions, les filtres récursifs ont une réponse impulsion de durée infinie (RII ou "IIR"). Il est possible de réaliser certain filtre RIF par un calcul récursif, mais ceci est rare et plutôt difficile.

L'intérêt des filtres récursifs est
1) leur faible coût en calcul.
2) leur faible retard (Tres outil pour les communications)

Les inconvénients des filtres récursifs sont
1) leur non-linéairité en phase et
2) leur instabilité numérique.

Soit h(n), la réponse impulsionnelle d'un filtre recursif.
Pour le filtre d'être réalisable, h(n) doit respecter

$$h(n) = 0 \quad n < 0$$

et $$\sum_{n=0}^{\infty} |\, h(n) \,| < \infty$$

Mais la réponse impulsionnelle, h(n), n'est pas directement accessible.
Il faut passer par la transformée en Z.

Stabilité

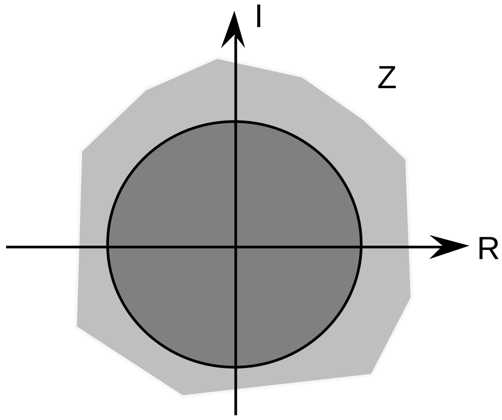
La fonction de transfert d'un filtre RII est

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{-n} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, z^{-n}}$$

Le condition de stabilité est que les N pôles (racines de $1 + \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, z^{-n}$)

se trouve à l'intérieur du cercle :

$| z | = 1.0.$



Exemple :

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})\,(1-0.4\,z^{-1})}$$ a des pôles à z = -0.5, 0.4. il est stable.

Méthodes de Conception des Filtres Récursif

Il y a trois méthode de conception des filtres récursifs :

1) Conception par placement des Pôles et Zéros dans le plan z.
2) Conception assisté par ordinateur utilisant l'optimisation linéaire.
3) Transposition d'un filtre analogique.

Pour faire une conception par placement des pôles, il faut calculer la transfomation en Z inverse.

Conception par placement des pôles et zéros

Considérons H(z) = Z{h(n)}.
Les pôles de H(z) sont les valeurs de z pour lesquelles H(z) tend vers l'infini.
Les zéros de H(z) sont les valeurs de z pour lesquelles H(z) est null.

Si H(z) possède M zéros z_m et N pôles, p_n, on peut la mettre sous la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-N}}$$

Les racines de P(z) sont des racines de H(z), Les racines de Q(z) sont de poles de H(z).
La région de convergence ne contient aucun pôle.
Afin de connaître les la réponse impulsionnell, h(n) on fait le division

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_{N-1} z^{-N-1}}{1 + b_1 z^{-1} + ... + b_{N-1} z^{-N-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

On peut toujours écrire une transformée en z sous cette forme, et représenter le signal par les listes de pôles et zéros.

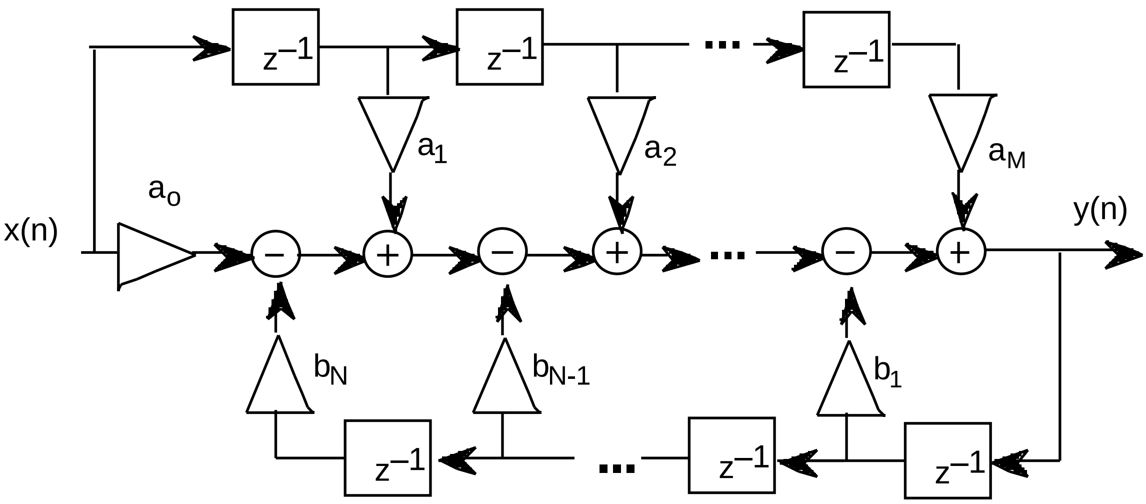
Les zéros et les pôles complexes de H(z) sont du type $\alpha \pm j\beta$.

Structure des filtres Récursifs

On appelle "structure d'un filtre" la manière dont on va implanter sa fonction de transfert. Il y a autant de structures que de façons d'écrire un fonction de transfert.

Exemple : $$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, x(k-n) - \sum_{n=1}^{N-1} b(n)\, y(k-n)$$

Un structure directe est de la forme suivante :

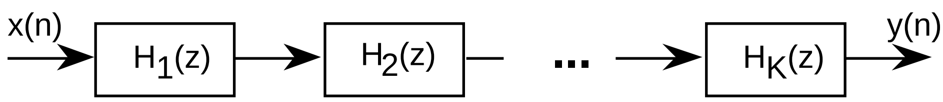


Decomposition en Série :

Une autre structure est obtenu par la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \prod_{i=1}^{K} H_i(z)$$

Ce qui donne une structure en cascade de filtre de 1^{iere} et 2^{ieme} ordre.



$$H_1(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad \text{ou bien} \quad H_2(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Le filtre de premier order aura ses pôles et zéros sur l'axe reél du plan z.
Un filtre de deuxieme ordre permet d'avoir les pôles et les zéros complexe pour la fonction de transfert globale, tout en restant avec les coefficient réel.

Linéairité de phase par renversement du temps

Linéairité implique $H(z) = H(z^{-1})$

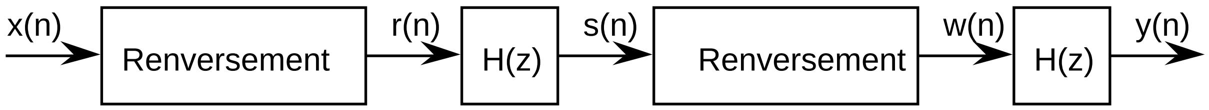
On peut l'obtenir par deux passages du filtre avec une renversement du temps.

soit : $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Renversement de temps : $r(n) = x(-n)$

En z

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{n} = X(z^{-1})$$



Étapes :

1) Renversement de temps : pour $0 \leq n < D$ $r(n) = x(D-n)$

2) Passe 1 : $$s(n) = \sum_{m=0}^{M} b(m)\, r(n-m) - \sum_{m=1}^{N} a(m)\, s(n-m)$$

3) Renversement de temps : pour $0 \leq n < D$ $w(n) = s(D-n)$

4) Passe 2 : $$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b(m)\, w(n-m) - \sum_{m=1}^{N} a(m)\, y(n-m)$$

En Z :

$$R(z) = X(z^{-1})$$
$$S(z) = H(z)\, R(z) = H(z)\; X(z^{-1})$$
$$W(z) = S(z^{-1}) = H(z^{-1})\; X(z)$$
$$Y(z) = H(z)\, H(z^{-1})\; X(z)$$

et $F(z) = H(z)\, H(z^{-1}) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ aura une phase null.