

# Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3

Premier Sémestre 2008/2009

Séance 7

11 décembre 2008

## Détection et Description de Contraste

### Plan de la Séance :

Les Champs Réceptifs Gaussiens.....	2
Filtres et dérivées.....	2
La fonction Gaussien.....	3
Les dérivées de la Gaussien.....	4
Les operateurs Differentielles.....	4
Les Filtres Numérique Gaussien.....	5
Les Dérivées de l'Image.....	7
L'Orientabilité des Gaussiens.....	7
L'espace d'échelles.....	8
Echelle Intrinsèque (ou caracteristique).....	10

## Les Champs Réceptifs Gaussiens

### Filtres et dérivées

La Transformé de Fourier d'une dérivée a une fonction est

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{s(t)}{t} \right\} = -2j \mathcal{F} \{f(t)\}$$

et donc  $\frac{s(t)}{t} = \mathcal{F}^{-1}\{-2j f(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{-2j\} * \mathcal{F}^{-1}\{f(t)\}$

On note que le convolution est une produit scalaire évalué à chaque échantillon

$$r(k) = s * f(i) = \langle s(i), f(k-i) \rangle = \sum_{i=-} s(k-i) f(i) = \sum_{i=-} s(i) f(k-i)$$

Donc, une dérivée est un FILTRE avec une fonction de transfert  $-2j$

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t} * s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{-2j\} * s(t)$$

Les filtres linéaires sont associatifs, distributifs et commutative.

$\mathcal{F}^{-1}\{-2j\}$  a une durée infinie.

On peut calculer la fonction de la dérivée d'un noyau,  $g(t)$ .  
ensuite, on échantillon et limite en taille :

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$\frac{ds(n)}{dt} = f(nT_e) * s(n)$$

La fonction Gaussien est une noyau invariante aux transformations affines

-

**La fonction Gaussien**

La fonction Gaussien est  $G(x, y) = e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{z_c}}$

La fonction Gaussienne est invariante à la transformation affine:

$$T_a\{G(x, y)\} = G(T_a\{x\}, T_a\{y\})$$

Rappel en séance 2 on a vu que  $x_r = x_c \frac{F}{z_c}$ .

Donc la "taille" d'un objet est en proportion de  $s = \frac{F}{z_c}$ .

La taille (ou échelle) est une paramètre de la transformation affine.

La fonction Gaussienne est invariante à la transformation d'échelle :

$$T_s\{G(x, y)\} = G(T_s\{x\}, T_s\{y\}) = G(sx, sy)$$

Si on divise  $z_c$  (distance entre la caméra et l'objet) par deux, on double la taille.

$$G(x, y) = G(2x, 2y)$$

En 2-D, la Gaussienne symétrique circulaire est  $G(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2A}}$  avec  $A = \frac{z_c^2}{F^2}$

La Gaussien est la fonction unique qui est symétrique circulaire et séparable.

On note que  $G(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2A}} = e^{-\frac{x^2}{2A}} * e^{-\frac{y^2}{2A}}$

Ceci nous offre beaucoup d'intérêt pour la vitesse de calcul.

**Les dérivées de la Gaussien**

$$G(x, y) = e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}}$$

$$G_x(x, y) = -\frac{x}{\sigma^2} G(x, y)$$

$$G_{xx}(x, y) = \left( \frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2} \right) G(x, y)$$

$$G_{xxx}(x, y) = -\frac{x^3 - x}{\sigma^6} G(x, y)$$

On note que le "gain" d'une noyau est son intégral.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}} dx dy = \sqrt{2\pi} \sigma^2$$

La propriété de l'invariance à l'échelle demande que  $A = 1$ .

**Les operateurs Differentielles**

Pour un signal en deux dimensions, les opérations différentielles sont

le gradient et la Laplacien  $\Delta$  :

Le gradient est un vecteur :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La Laplacien est une scalaire :  $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Pour une fonction  $s(x,y)$  :

La Gradient :

$$\nabla s(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial s(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La Laplacien

$$\Delta^2 s(x,y) = \frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial y^2}$$

si  $s(x,y)$  est filtré par  $G(x,y; )$  :  $s * G(x,y; ) = \int_{s=-t=-} s(x,y) G(x-s, y-t)$

La Gradient :  $(s * G(x,y; )) = s * \left( \frac{\partial G(x,y; )}{\partial x} \right) = s * \frac{\partial G(x,y; )}{\partial x}$

La Laplacien  $\Delta^2(s * G(x,y; )) = s * \Delta^2 G(x,y; ) = s * \left( \frac{\partial^2 G(x,y; )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x,y; )}{\partial y^2} \right)$

### Les Filtres Numérique Gaussien

Parce que l'image est un signal échantillonné, il faut échantillonner  $G(x, y, )$

On obtient les filtres numériques par un simple échantillonnage de la fonction Gaussienne sur un intervalle  $[-R, R]$ .

On remplace  $x$  par  $nT_e$ , ou  $T_e$  est un

$$G(n) = G(nT_e, ) = e^{-\frac{1}{2} \frac{nT_e^2}{2}}$$

$T_e$  est la pas d'échantillonnage.

Par convention l'on considère  $T_e = 1$ .

Donc, la forme numérique est  $G(n, ) = e^{-\frac{1}{2} \frac{n^2}{2}}$

$$A = \int_{n=-} e^{-\frac{1}{2} \frac{n^2}{2}} dx \sqrt{2} .$$

Il y a deux facteurs à maîtriser :

- La taille de la "support"  $N = 2R+1$ .
- la ratio  $/T_e$

Pour a:

Pour  $N = 7$ , les "ondes" de  $W_R(f)$  dominant le spectre.

Pour  $N = 9$ , les ondes, on peut d'effet.

Pour b:

Il vaut mieux que  $/T_e = 1$

Les dérivées de la Gaussienne numérique sont :

$$G_x(n, \sigma) = -\frac{n}{2} G(n, \sigma)$$

$$G_{xx}(n, \sigma) = \frac{n^2 - 2}{4} G(n, \sigma)$$

$$G_{xxx}(n, \sigma) = -\frac{n^3 - n}{6} G(n, \sigma)$$

Pour la Gaussien en 2D.  $G_x(i, j, \sigma)$

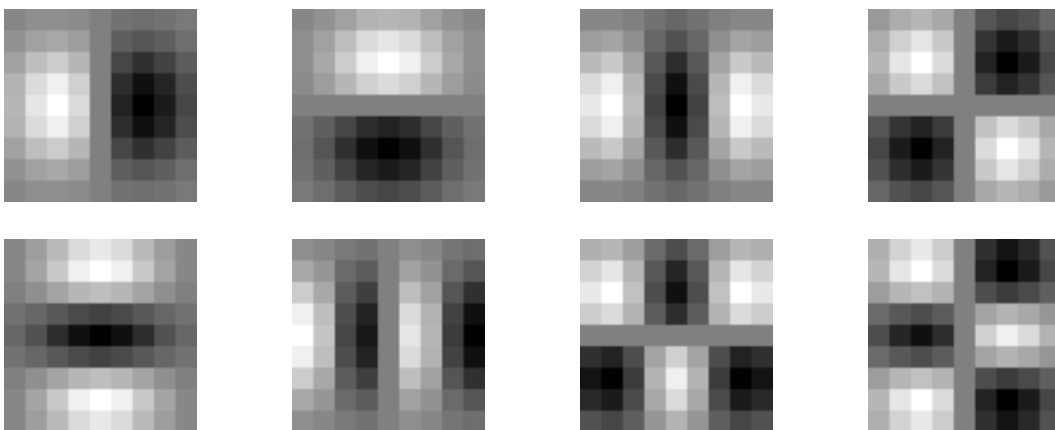
$$G_x(i, j, \sigma) = -\frac{i}{2} G(i, j, \sigma) = -\frac{i}{2} G(i, \sigma) * G(j, \sigma)$$

$$G_{xy}(i, j, \sigma) = \frac{ij}{4} G(i, j, \sigma) = -\frac{i}{2} G(i, \sigma) * -\frac{j}{2} G(j, \sigma)$$

Un vecteur de champs réceptifs forme une base de Taylor

$$G_a = (G_x, G_y, G_{xx}, G_{xy}, G_{yy}, G_{xxx}, G_{xxy}, G_{xyy}, G_{yyy})$$

Ceci donne la famille de champs réceptifs Gaussien



Les champs réceptifs Gaussien  $G_x, G_y, G_{xx}, G_{xy}, G_{yy}, G_{xxx}, G_{xxy}, G_{xyy}, G_{yyy}$ .

Note qu'il y a un paramètre  $\sigma$ . Ceci est le paramètre d'échelle. Ce détermine la limite de la résolution d'une description.

**Les Dérivées de l'Image**

Pour l'image  $p(m, n)$ ,  $p(m,n)$  est calculé par  $G(m, n, \theta) * p(m,n)$ .

$$\text{ou } G(i,j) = \begin{pmatrix} G_x(i,j, \theta) \\ G_y(i,j, \theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} G_x(i, j, \theta) \\ G_y(i, j, \theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient: } P(i,j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(i,j)}{\partial x} \\ \frac{\partial P(i,j)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P * G_x(i, j, \theta) \\ P * G_y(i, j, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(i, j) \\ P_y(i, j) \end{pmatrix}$$

Il faut spécifier  $\theta$  pour calculer  $P(i, j)$

$$\begin{aligned} \text{Laplacien: } \Delta P(i, j) &= \frac{\partial^2 P(i, j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(i, j)}{\partial y^2} \\ &= P * G_{xx}(i, j, \theta) + P * G_{yy}(i, j, \theta) \\ &= P_{xx}(i, j) + P_{yy}(i, j) \end{aligned}$$

(Le Laplacien est un scalaire.)

**L'Orientabilité des Gaussiens**

Pour chaque pixel, on peut calculer une orientation "intrinsic"

$$\theta(x, y) = \text{Atan2}\{\langle A(x, y), G_y \rangle, \langle A(x, y), G_x \rangle\}$$

Les réponses de filtres orientés peuvent être calculées par une somme de réponses des filtres de base, pondérée par les sinus et cosinus.

$$G_1^\theta = \cos(\theta) G_x + \sin(\theta) G_y$$

$$G_2^\theta = \cos^2(\theta) G_{xx} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) G_{xy} + \sin^2(\theta) G_{yy}$$

$$G_3^\theta = \cos^3(\theta) G_{xxx} + 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) G_{xxy} + 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) G_{xyy} + \sin^3(\theta) G_{yyy}$$

donc :

$$P_1^\theta(i,j) = \cos(\theta) P_x(i,j) + \sin(\theta) P_y(i,j)$$

$$P_2^\theta(i,j) = \cos^2(\theta) P_{xx}(i,j) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) P_{xy}(i,j) + \sin^2(\theta) P_{yy}(i,j)$$

$$P_3^\theta(i,j) = \cos^3(\theta) P_{xxx} + 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) P_{xxy} + 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) P_{xyy} + \sin^3(\theta) P_{yyy}$$

## L'espace d'échelles

La fonction Gaussienne est invariante à la transformation d'échelle :

$$T_s\{G(x, \sigma)\} = G(T_s\{x\}, T_s\{\sigma\})$$

On a vu que la "taille" d'un objet est en proportion de  $x = \frac{F}{z_c}$ .

Si  $z$  est doublé,  $x$  est diminué par 1/2.

Si on multiplie par "s" la taille, on remplace  $x \Rightarrow sx$   
 Pour rester "invariante" il faut aussi accroître la taille de la localité par "s".

$$G(x, \sigma) \Rightarrow G(sx, s\sigma)$$

Un espace d'échelle,  $P(x, y, \sigma)$  est défini par un noyau,  $g(x, y; \sigma)$   
 avec le paramètre  $\sigma$  libre

$$P(x, y, \sigma) = g(x, y; \sigma) * p(x, y)$$

pour  $X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$ ,  $Y_{\min} \leq y \leq Y_{\max}$ ,  $\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}$ ,

ou  $\sigma$  est le paramètre d'échelle, avec une échelle logarithmique.

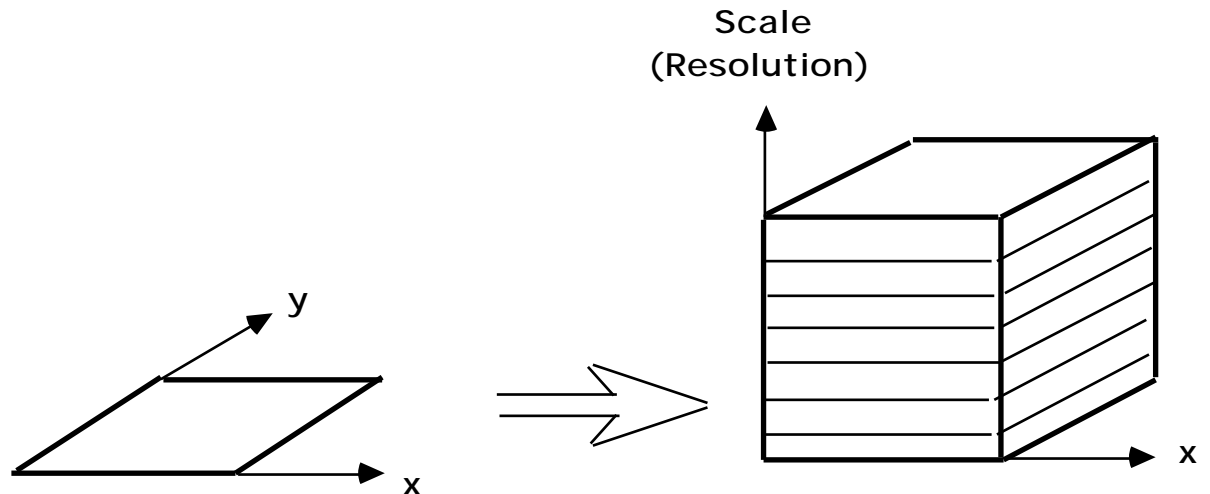
Pour une description invariante à l'échelle, il faut un axe logarithmique pour  $\sigma$ .

L'espace d'échelle facilite la recherche de correspondance  
 grâce à la décomposition des formes à divers niveaux de résolution :

Résolution basse : peu de formes,  
 vue globale,  
 détails grossiers

Résolution haute : nombreux formes,  
 vue locale,  
 détails fins.





La description de l'image se trouve à toutes les échelles.

Propriétés de l'espace d'échelle :

- Invariance (Equivariance) aux changements de taille
- Le bruit de numérisation se trouve dans les hautes fréquences (donc petit  $\lambda$ ).
- Les points de contraste dans les moyennes fréquences sont souvent les plus stables,

L'espace d'échelle est un idéal mathématique. Pour calculer il faut travailler sur les valeurs numériques. Ceci implique un échantillonnage en  $x$ ,  $y$ , et  $\text{Log}(\lambda)$ .

Pourquoi " $\text{Log}(\lambda)$ " ?

$$G(sx, \log(s \lambda)) = G(sx, \log(s) + \text{Log}(\lambda))$$

dans une échelle  $\text{Log}(s)$ , changement d'échelle  $\Rightarrow$  Translation.

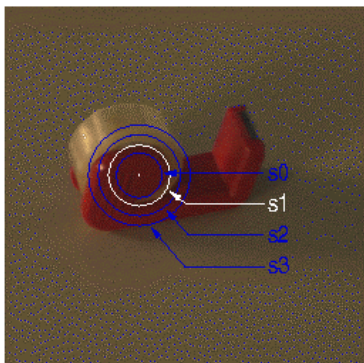
Comment découvrir l'échelle locale ?

**Echelle Intrinsèque (ou caractéristique)**

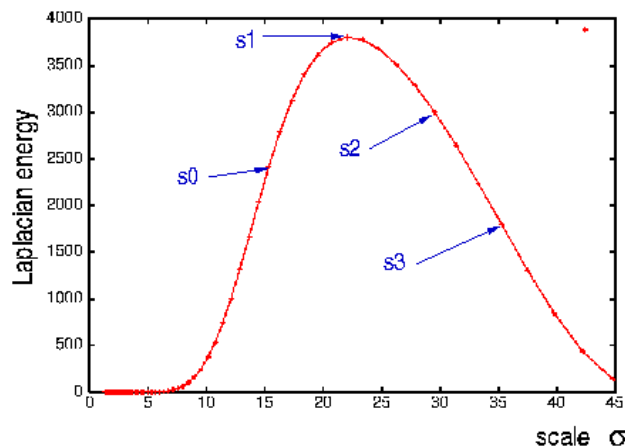
Considère la Laplacienne pour à la pixel x, y, en fonction de

$$^2P(i,j) = \langle G_{xx}(i, j, \sigma), p(i, j) \rangle + \langle G_{yy}(i, j, \sigma), p(i, j) \rangle$$

A chaque point de l'image il y a quelques valeurs de  $\sigma$  pour laquelle la  $^2P(i,j)$  sont maximale.



zero crossing of Laplacian at  $s_i$



L'echelle intrinsèque à  $(i, j)$  est  $i(i, j) = \text{Arg-Max} \{ ^2P(i,j) \}$

Considère la Laplacienne pour à la pixel x, y, en fonction de

$$^2p(i,j) = \langle G_{xx}(i, j, \sigma), p(i, j) \rangle + \langle G_{yy}(i, j, \sigma), p(i, j) \rangle$$

A chaque point de l'image il y a quelques valeurs de  $\sigma$  pour laquelle la  $^2P(i,j)$  sont maximale.

$$i(i, j) = \text{Arg-Max} \{ ^2P(i,j) \}$$

Le Gaussian est une solution de la Equation de Diffusion.

Equation de Diffusion:  $^2G(x,y; \sigma) = \frac{G(x,y; \sigma)}{\sigma^2}$

En conséquence,  $^2G(x,y; \sigma) = G(x,y; \sigma_1) - G(x,y; \sigma_2)$

pour  $\sigma_1 = \sqrt{2} \sigma_2$