Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG — Deuxième Sémestre 2008/2009

Séance 5 : — 20 mar 2009

La Transformée de Fourier Discrète

La Transformée de Fourier Discrète

Formule du Jour :

Définition de la Transformée de Fourier Discrète
(TFD ou DFT en Anglais)

Définition : Soit une séquence de N échantillons x(n) pour n [0, N–1]

$$\mathrm{TFD}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\; e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$$

La TFD comprend des fréquence de k cycles sur N échantillons, k $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$

TFD Inverse :

$$\mathrm{TFD}^{-1}\{X(k)\} = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\; e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, W_N^{-nk}$$

Intérêt :

Il existe un algorithme qui permettent de calculer la transformée d'une séquence de N échantillons avec un coût de calcul N Log_2 N multiplications.
Ceci permet un filtrage rapide par multiplications dans le domaine Fourier.
Si N est 2^p, on peut utiliser l'algorithme rapide (FFT) de Cooley - Tukey.

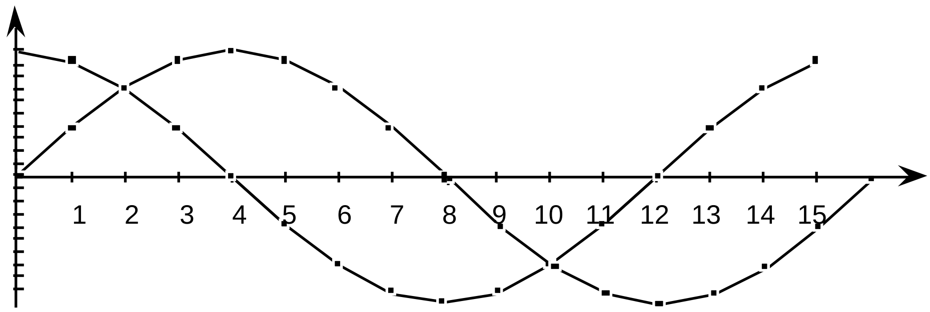
Notation pour la racine d'unité

La transformée de Fourier Discrete est définit à l'aide d'une exponentielle complexe. L'exponentielle complexe "discrète" est définie par la substitution de n pour t.

$$e^{j2\pi fn} = \mathrm{Cos}(2\pi fn) + j\,\mathrm{Sin}(2\pi fn)$$

Par exemple pour $f = \frac{1}{16}$ ou $\omega = \frac{2\pi}{16}$ (une cycle pour 16 echantillons),

$\mathrm{Cos}(\frac{2\pi n}{16}) + j\,\mathrm{Sin}(\frac{2\pi n}{16})$ a la forme :



On peut definir :

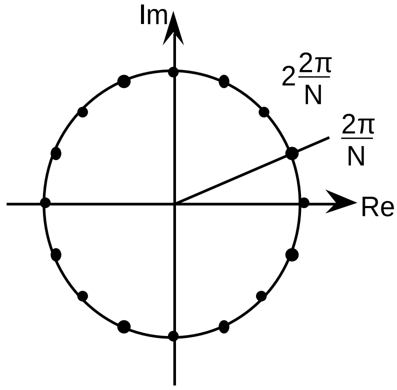
$$W_N = e^{-j2\pi\frac{1}{N}} = \mathrm{Cos}\,(2\pi\frac{1}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi\frac{1}{N})$$

Les n puissances de W_N pour n [0, ..., N–1] divise le circle unitaire (Théorem de de Moivre).

W_N^n est une séquence $W_N(n) = \mathrm{Cos}\,(n\frac{2\pi}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(n\frac{2\pi}{N})$

$$W_N^n = \left(e^{-j2\pi\frac{1}{N}}\right)^n = e^{-j2\pi\frac{n}{N}}$$

$$W_N^n = \left(\mathrm{Cos}\,(2\pi\frac{1}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi\frac{1}{N})\right)^n = \mathrm{Cos}\,(2\pi\frac{n}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi\frac{n}{N})$$



Propriétés de W

$$W_N^{n+m} = W_N^n \; W_N^m$$

$$W_N^{n \bmod N} = W_N^n$$

pour tour entier m : $W_N^{m\,N} = 1$

$$W_N^{N/2} = -1$$

Une puissance entier "k" est ajouté afin de definir une ensemble de séquences (signals) orthogonales. $k \quad [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ ou bien $k \quad [0, N-1]$

$$W_N^{nk} = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}} = W_N^k(n) = \mathrm{Cos}\,(2\pi n \frac{k}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi n \frac{k}{N})$$

Les k fonctions $W_N^{nk} = W_N^k(n) = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$ pour $k \quad [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ sont orthogonale sur $n \quad [0, N-1]$.

$$\langle W_N^{nk_1}, W_N^{nk_2} \rangle = \begin{cases} N & k_1 = k_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration de la orthogonalité :

Orthogonalité: $<W_N^{nk_1}, W_N^{nk_2}> = \begin{cases} N & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Demonstration :

$$: <x(n), y(n)> = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, y^*(n)$$

$$< e^{-j2\pi k_1 \frac{n}{N}} ,N), e^{-j2\pi k_2 \frac{n}{N}} > = \sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi k_1 \frac{n}{N}} \cdot e^{+j2\pi k_2 \frac{n}{N}}$$

$$= \sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi (k_2 - k_1) \frac{n}{N}} = \begin{cases} N & k_1 = k_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Deux cas :

Si $k_1 = k_2$ alors $\sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi (k_2 - k_1) \frac{n}{N}} = \sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi (0) \frac{n}{N}} = \sum_{0}^{N-1} 1 = N$

Si $k_1 \neq k_2$ alors $k_3 = k_1 - k_2 > 0$ et $\sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi n\, k_3 \frac{1}{N}} = 0.$

On peut, ainsi faire une projection reversible d'une séquence de N echantillons, x(n) sur les N signals de la forme $W_N^{nk} = W_N^k(n) = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$.

<u>Définition de la Transformée de Fourier Discrète</u>

(TFD ou DFT en Anglais)

Soit une séquence de N échantillons $x(n)$ pour n $[0, N-1]$

$$\mathrm{TFD}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$$

La TFD comprend des fréquence de k cycles sur N échantillons, k $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

TFD Inverse :

$$\mathrm{TFD}^{-1}\{X(k)\} = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\ e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, W_N^{-nk}$$

Les Propriétés de la DFT

1) Linéarité :

TFD{a x(n) + b y(n)) = a TFD(x(n)) + b TFD(y(n)}

2) Renversement temporel :

TFD{x(-n)} = X(-k)

3) Conjugaison :

TFD{x*(n)} = X*(-k).

4) Rétard en temps.

$$\text{TFD}\{\ x(n + no)\} = X(k)\ e^{j2\pi \frac{n_o}{N}}$$

5) Rétard en fréquence.

$$\text{TFDI}\{\ X(k\text{-}ko)\} = x(n)\ e^{\ j2\pi \frac{k_o}{N}}$$

6) Symmetrie :

si x(n) est REEL pour $0 \leq n \leq N-1$ alors

Re{ X(k) } = Re{ X(-k) }

Im{ X(k) } = -Im{ X(-k) }

| X(k) | = | X(-k) |

si x(n) = x(-n) Alors Im{ X(k) } = 0

NOTE : dans ce cas X(k) = X*(k)

7) Convolution Circulaire :

TFD(x(n) y(n) } = X(k) ◯ Y(k)

TFD{x(n) ◯ y(n)} = X(k) Y(k).

Il s’agit d’une convolution circulaire. Pour cette raison, le filtrage numérique par TFD demande certaines précautions.

Analyse du Transforme de Fourier Discrete.

L'exponentielle complexe "discrète" est définit par :

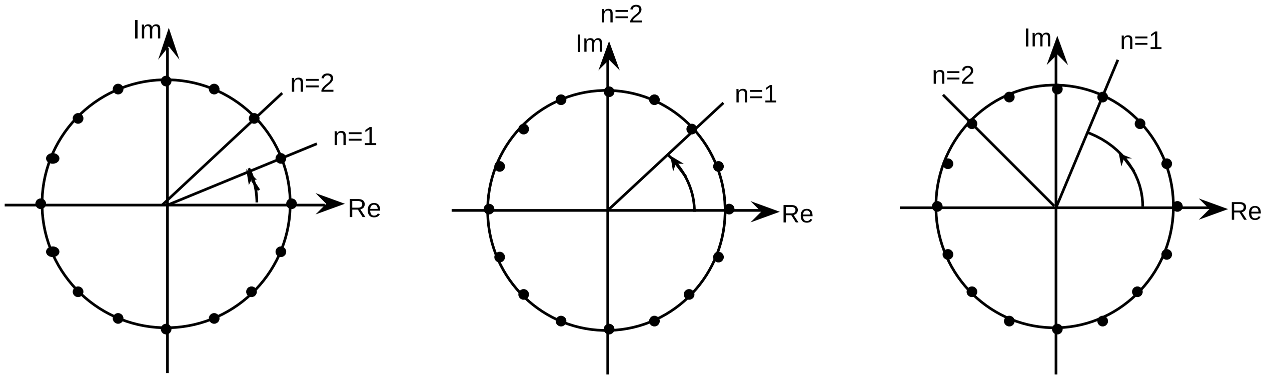
$$e^{-j\,2\pi n} = \mathrm{Cos}(2\pi fn) + j\,\mathrm{Sin}(2\pi fn)$$

Pour un Transformée de Fourier, il faut spécifer le range de f, et de N.

$$W_N^{nk} = \left(e^{-j2\pi\frac{k}{N}}\right)^n = e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$W_N^{nk} = \left(\mathrm{Cos}\,(2\pi\frac{k}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi\frac{k}{N})\right)^n = \mathrm{Cos}\,(2\pi\frac{nk}{N}) - j\,\mathrm{Sin}(2\pi\frac{nk}{N})$$

Par exemple pour N = 16 echantillons il y a 16 fréquences : $f_k = \frac{k}{N}$



k=1 k=2 k=3

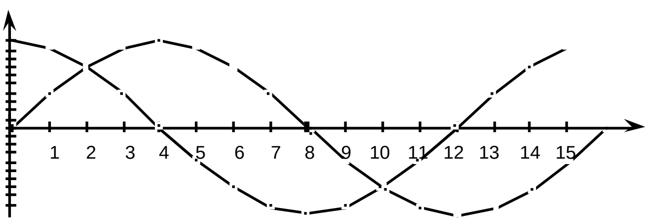
Le fréquence le plus bas et f = 0 est k=0

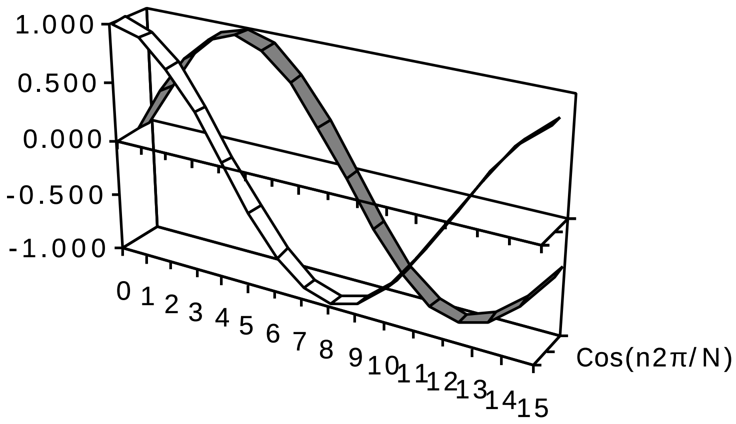
Le deuxième fréquence k=1 et f = $\frac{1}{16}$: 1 cycle per 16 échantillons

f = $\frac{1}{16}$ ou $\omega = \frac{2\pi}{16}$ (une cycle pour 16 echantillons),

$\mathrm{Cos}(\frac{2\pi n}{16}) + j\,\mathrm{Sin}(\frac{2\pi n}{16})$ a la forme :

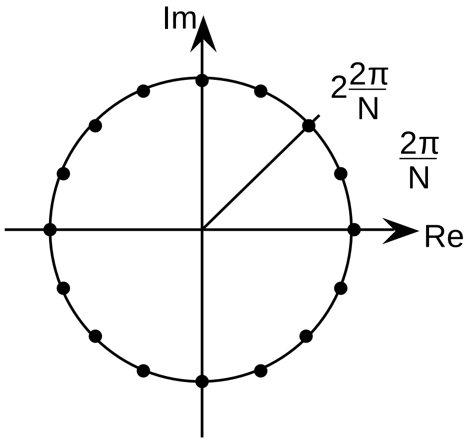
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Cos(n2π/N)	1.000	0.924	0.707	0.383	0.000	-0.383	-0.707	-0.924	-1.000	-0.924	-0.
sin(2πn/N)	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000	0.924	0.707	0.383	0.000	-0.383	-0.

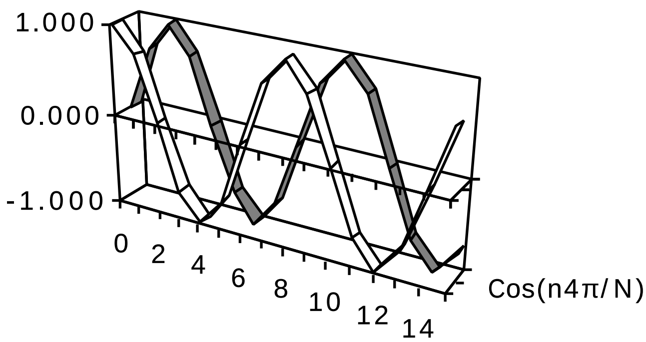


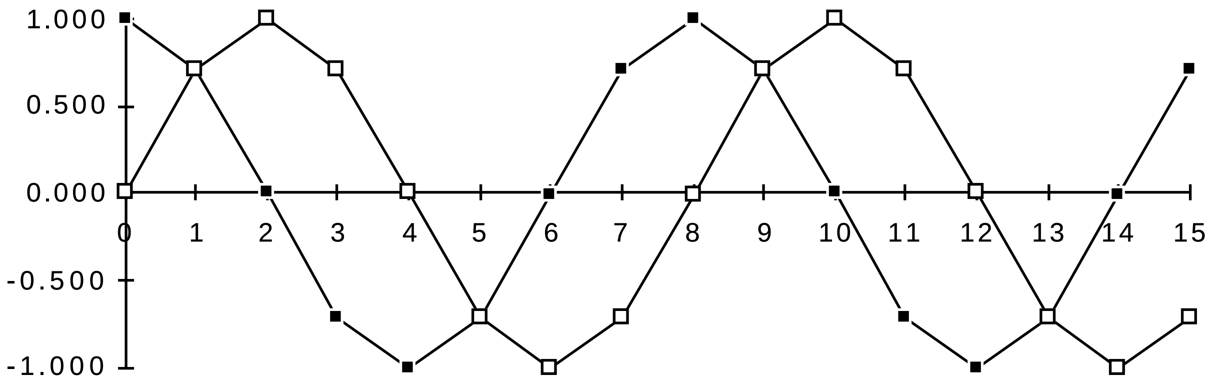


Le deuxième bas fréquence est 2 cycles per N. Donc k = 2.

$W_N^{n2} = \text{Cos}\,(n\frac{4\pi}{N}) - j\,\text{Sin}(n\frac{4\pi}{N})$. $\quad f = \frac{2}{16}$ ou $\omega = \frac{4\pi}{16}$







Pour k = 3 : $W_N^{n3} = \text{Cos}\,(n\frac{6\pi}{N}) - j\,\text{Sin}(n\frac{6\pi}{N})$. $f = \frac{3}{16}$ ou $\omega = \frac{6\pi}{16}$

pour k = 4 $\quad W_N^{n4} = \text{Cos}\,(n\frac{8\pi}{N}) - j\,\text{Sin}(n\frac{8\pi}{N})$. $f = \frac{4}{16}$ ou $\omega = \frac{8\pi}{16}$

Interpretation en Algebre Linéaire

La transformée de Fourier Discrète peut être vue comme une transformation linéaire appliqué au vecteur x(n) afin de rendre le vecteur X(k).
Les lignes de cette transformation sont les complexes exponentielles.

$$X(k) = \mathbf{F}\, x(n)$$

F est une matrice avec les coefficients $f_{kn} = W_N^{nk} = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^{0\,0} & W_N^{0\,1} & \dots & W_N^{0\,N-1} \\ W_N^{1\,0} & W_N^{1\,1} & \dots & W_N^{1\,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_N^{N-1\,0} & W_N^{N-1\,1} & \dots & W_N^{N-1\,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

où bien :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi j \frac{0\cdot 0}{N}} & e^{-2\pi j \frac{0\cdot 1}{N}} & \dots & e^{-2\pi j \frac{0\cdot (N-1)}{N}} \\ e^{-2\pi j \frac{1\cdot 0}{N}} & e^{-2\pi j \frac{1\cdot 1}{N}} & \dots & e^{-2\pi j \frac{1\cdot (N-1)}{N}} \\ & & \dots & \\ e^{-2\pi j \frac{(N-1)\cdot 1}{N}} & e^{-2\pi j \frac{(N-1)\cdot 2}{N}} & \dots & e^{-2\pi j \frac{(N-1)\cdot (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Note que les coefficient X(k) sont périodique en k avec période N.
Donc X(–N/2) = X(N/2), X(–N/2+1) = X(N/2+1), X(–1) = X(N–2) etc.

Utilisation de la TFD pour le convolution

Convolution Apériodique

Soit deux séquence échantillonnée numérique de durée finie,
x(n) de durée N_x y(n) de durée N_y tel que et n [0, N_x-1] et

x(n) pour n [0, N_x-1]
y(n) pour n [0, N_y-1].

Les séquences apériodique sont nuls hors de leur intervalle de définition.

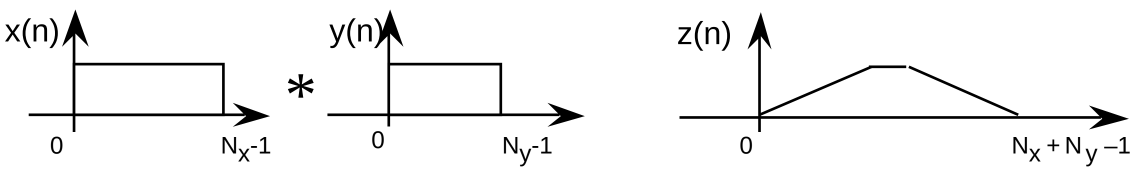
La convolution apériodique de x(n) avec y(n) est une produit
de x(n) et y(–n) pour chaque position entre 0 et N_x+N_y-2.

$$y(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=0}^{N_x+N_y-2} x(m)\cdot y(n-m) = \sum_{m=0}^{N_x+N_y-2} x(n-m)\cdot y(m)$$

La taille de la résultat est de $N = N_x + N_y - 1$ échantillons.

Le premier valeur non nul est cré pour
n = 0 : x(m) non-nul pour $0 \le m \le N_x-1$,
y(n-m) non-nul pour y(n) $-N_y+1 \le m \le 0$
$n = N_x + N_y - 1$: x(n) non-nul pour $0 \le n \le N_x-1$,
y(n-m) non-nul pour y(n) $N_x - 1 \le m \le N_x + N_y - 1$
ie. ($n-N_y-1 < m < n$)

La convolution coût O(N_x N_y) opérations.



Soit M = Min(N_x, N_y)
Le premier et dernier M echantillons de z(n) sont des effets de bords.

Filtrage par Produit de Transformée de Fourier Discrète.

Un des intérêt principale de la TFD est qu'il permet de faire les convolutions de deux signaux de taille N échantillons avec un coût de calcul de l'ordre de 2N Log(N) en lieu de N^2. Mais le TFD réalise une convolution périodique.
Ceci peut poser un piège.

Signal Périodique :

Soit l'opérateur MODULO : "mod". $m \bmod N = m - N \cdot \mathrm{int}\{m/N\}$
(int rend le partie entier d'une réel).

exemples 18 mod 10 = 8, 3 mod 2 = 1

Soit x(n) et y(n) non-null pour n [0,..., N-1]

$x_p(n) = x(n \bmod N)$ $y_p(n) = y(n \bmod N)$.

Soit x(n) et y(n) non-null pour n [0, N-1]

$z_p(n) = \mathrm{ITFD}\{ \mathrm{TFD}\{x(n)\} \cdot \mathrm{TFD}\{y(n)\} \}$

où $z_p(n) = z_p(n + kN)$ pour k $[-\infty, \infty]$

on dit que $\mathrm{TFD}\{x(n)\} \cdot \mathrm{TFD}\{y(n)\} \Leftrightarrow x \bigcirc y(n)$

$\bigcirc$ est convolution circulaire (où périodique)

$z_p(n) = x \bigcirc y(n) = x_p * y_p(n)$

ou $x_p(n)$, $y_p(n)$, $z_p(n)$ sont des signals périodiques en N

Il est possible de calculer une convolution apériodique, $x * y(n)$, par une produit de TFD. Mais pour ce faire, il faut incruster x(n) et y(n) dans des séquences périodiques en ajoutant les zéros.

Convolution Circulaire (ou périodique)

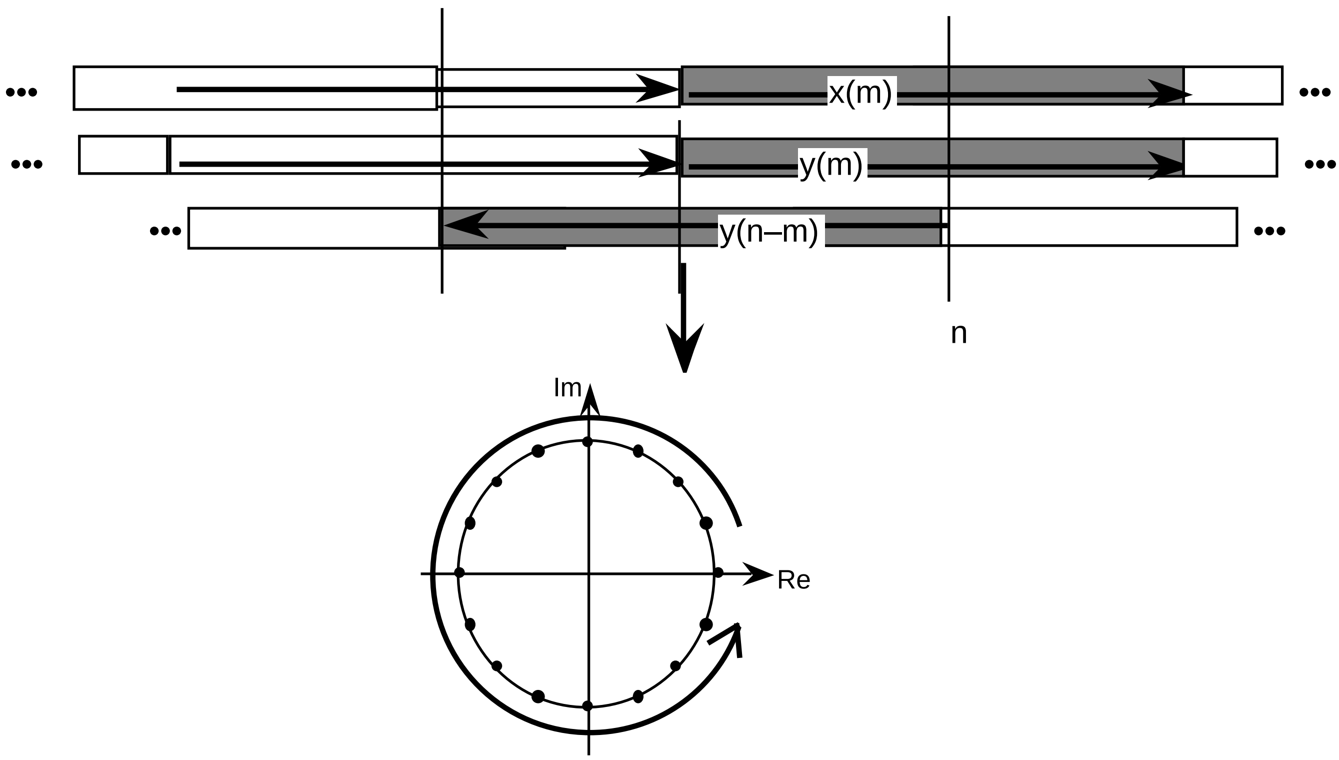
$x_p(n)$, périodique avec périod N, $x_p(n) = x_p(n + kN)$ pour $k \quad [-\infty, \infty]$
Soit $x(n)$ une période de $x_p(n)$

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & \text{pour } n \quad [0...N-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $y_p(n)$, périodique avec périod N, $y_p(n) = y_p(n + kN)$ pour $k \quad [-\infty, \infty]$
Soit $y(n)$ une période de $y_p(n)$

$$y(n) = \begin{cases} y_p(n) & \text{pour } n \quad [0...N-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x \bigcirc y(n) = x_p \quad y_p(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m)\cdot y_p(n-m)$$



On peut voir le convolution circulaire comme la rotation d'une séquence autour d'un autre.

Convolution par TFD

Convolution Circulaire par TFD.

$$\mathrm{TFD}\{x_p(n) \bigcirc y_p(n)\} = \mathrm{TFD}\{x_p(n)\} \cdot \mathrm{TFD}\,\{y_p(n)\} = X_p(k) \cdot Y_p(k).$$

et par dualité

$$\mathrm{TFD}(\, x_p(n) \cdot y_p(n)\ \} = \mathrm{TFD}\{x_p(n)\} \bigcirc \mathrm{TFD}\,\{y_p(n)\} = X_p(k) \bigcirc Y_p(k)$$

Un des intérêt principale de la TFD est qu'il permet de faire les convolutions de deux signaux de taille N échantillons avec un coût de calcul de l'ordre de 2N Log(N) in lieu de N^2. Mais le TFD réalise un convolution périodique.
Ceci peut poser une piège.

Soit x(n) de durée n $[0, N_x\text{-}1]$ et y(n) de durée n $[0, N_y\text{-}1]$.

Il est possible de calculer un convolution aperiodique, $x(n) * y(n)$, par une produit de TFD. Mais pour ce faire, il faut incruster x(n) et y(n) dans des séquence périodique $x_p(n)$ et $y_p(n)$ de taille $N = N_x + N_y - 1$.

Les échantillons de $x_p(n)$ entre $N_x - 1$ et $N_x + N_y - 1$ sont zéro.
Les échantillons de $y_p(n)$ entre $N_y - 1$ et $N_x + N_y - 1$ sont zéro.

$X_p(k) = \mathrm{TFD}\,\{x_p(n)\}$ coût $O(N \ln N)$
$Y_p(k) = \mathrm{TFD}\,\{y_p(n)\}$ coût $O(N \ln N)$
$Z_p(k) = X_p(k) \cdot Y_p(k)$ coût $O(N)$
$z_p(n) = \mathrm{TFDI}\{\, Z_p(k)\}$ coût $O(N \ln N)$

Cout total $3\, O(N \ln N) + O(N) = O(N \ln N)$.

Comparé à $O(N_x\, N_y)$ pour x(n) y(n)

On est gagnant si $(N_x + N_y) \ln (N_x + N_y) < N_x\, N_y$

<u>Convolution avec un signale de durée non-borné</u>

En pratique, on rencontre souvent des situations où il faut filtrer un signale de longue durée (voir illimité). C'est, par exemple, la cas lorsque on désire filtrer un signal représente la parole, le bourse, ou le sortie d'une capteur.

Le calcul d'une TFD sur une longue durée pose certains problèmes pratiques. Pour un séquence longue, la coût en mémoire et en temps de calcule d'une TFD est prohibitif. De plus, pour obtenir le premier échantillon du résultat, on doit attendre la fin de tous le calculs.

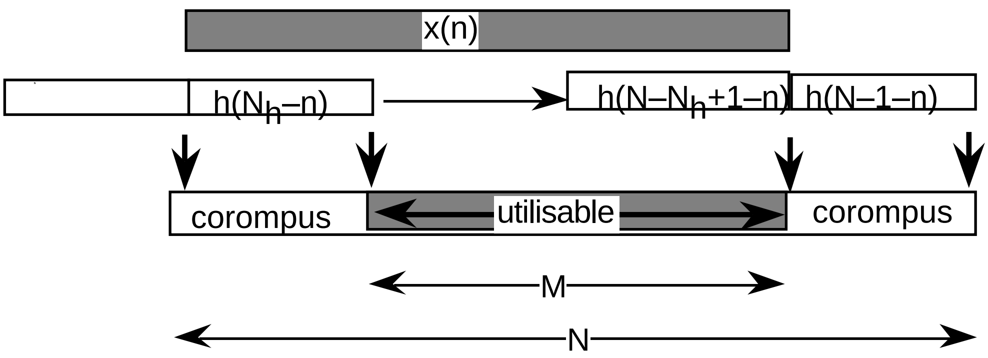
exemple : 10 seconds de parole au raison de 20 K échantillons per second = 200 K.
Transformé de Fourier demande 200 K Log_2(200 K) opérations et donne 200K échantillons on fréquence. On n'a pas besoins d'un tel précision en fréquence mais on a souvent besoins des résultats avec une retard inférieur à une seconde.

Soit le filtre à convolué, h(n), est de durée N_h tel que et n [0, N_h-1]
Le séquence a traiter, x(n) est d'une durée illimité.

On choisit une taille $N = N_x + N_{yh} - 1$ en puissance de 2. (ex 1024).

1) Incrustrer h(n) dans une sequence $h_N(n)$ de taille N.
2) Caluler H(k) = TFD{$h_N(n)$} une fois
3) Appliquer la TFD sur des sections de x(n) de n [N_{debut}, N_{fin}] de taille
$M = N - N_h$

Attention: Les premiers N_h et les derniers N_h echantillons sont corrompus par l'effet de bord.



x(n) est decoupé en sections de taille $N_x = N - N_h + 1$ tous les
$M = N - 2N_h + 1$ echantillons.

Usage de la TFD pour l'analysis de spectre.

On peut utiliser le TFD pour faire une "spectro-gram". s'un signal de durée illimité.

Technique : On extrait de séequence de taille N echantillon avec une pas de N_p échantillon. Le plus large N, le plus de précision dans le spectre, mais le plus de calcul et le plus de rétard dans le resultat.

Chaque séquence dur de $n_o = k\,N_p$ à $kN_p + N\text{-}1$.

Pou chaque séquence on calcule $DFT\{s(n + k\,N_p)\}$

Typiquement on affiche le module $\|\, DFT\{s(n + k\,N_p)\}\,\|$

Mail attention, les reponse pour les fréquences intermédiare n'est pas toujours beau.

La réponse fréquentielle W_N^{nk}

Chaque signal W_N^{nk} est un filtre qui passe certain fréquence d'une séquence x(n). Quelle sont les réponse de ces filtres?

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, z^{-n} \qquad \text{et} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, W_N^{-nk}$$

donc :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, W_N^{-nk} \right) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(W_N^{-k} z^{-1} \right)^{-n}$$

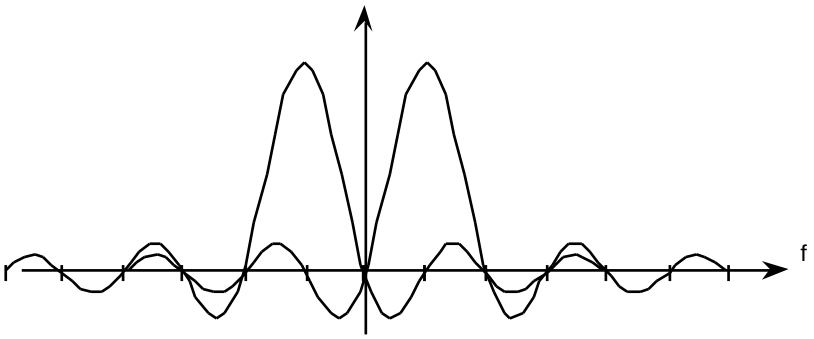
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)\, F(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

ou $F(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$

on note que $F(\omega) = 0$ pour $k = 1, 2, 3, ... N-1$ et $F(0) = 1$.



Quand $\Delta f = \frac{1}{N}$ les nulls de chaque $W(f - k\,\Delta f)$ s'aligne.